

带自由参数高阶变系数耦合非线性 Schrödinger 方程的 Painlevé 可积性*

秦 振 云¹ 马 文 秀² 马 红 彩³

提要 借助于奇异分析的手段判断带自由参数高阶变系数耦合非线性 Schrödinger 方程的 Painlevé 可积性. 得到了在一定参数约束下, 仅有两个子系统是 Painlevé 可积的.

关键词 Painlevé 可积性, 非线性 Schrödinger 方程, 变系数

MR (2000) 主题分类 35Q51, 37K05, 37K10, 37K40

中图法分类 O175.29

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2012)02-0229-08

1 引 言

近年来, 耦合非线性 Schrödinger 方程已引起广泛关注. 这类方程被应用到许多非线性现象中, 如水波、光通讯以及生物链中^[1–7], 特别地, 非线性 Schrödinger 方程提供了光纤中光波非线性传播的基本模型^[8–15].

光孤子方程可积性的研究不仅在理论上具有非常重要的作用, 因为利用方程的可积性可以求得各类孤子解, 而且从技术上, 可积性保证了孤子间相互作用及扰动行为. Painlevé 分析是判定方程可积性的一个强有力工具, 特别对于多参数非线性方程也是非常有效的^[16–30]. 因此借助于 Painlevé 分析寻求孤子方程是非常有意义的.

带自由参数高阶变系数耦合非线性 Schrödinger 方程^[11]

$$\begin{cases} iu_z + a(z)u_{tt} + bu(\alpha|u|^2 + \beta|v|^2) + (b_1(z, t) + ic_1)u + ib_2(z, t)u_t \\ + ib_3(z)u_{ttt} + (b_4 + ic_2)u(|u|^2 + |v|^2)_t + ib_5(u(|u|^2 + |v|^2))_t = 0, \\ iv_z + a(z)v_{tt} + bv(\beta|u|^2 + \gamma|v|^2) + (b_1(z, t) + ic_1)v + ib_2(z, t)v_t \\ + ib_3(z)v_{ttt} + (b_4 + ic_2)v(|u|^2 + |v|^2)_t + ib_5(v(|u|^2 + |v|^2))_t = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

可以描绘光纤中的超短脉冲的传播, 其中

$$i^2 = -1, \quad u = u(z, t), \quad v = v(z, t),$$

系数 b, c_1, b_4, c_2, b_5 及 α, β, γ 为实常数, $a(z), b_3(z), b_1(z, t), b_2$ 为实的解析函数. b_4 和 c_2 在文 [31] 中表示非线性色散项. 当 $u = v$ 时, 耦合方程退化为文 [30] 中讨论的变系数高阶非线性 Schrödinger 方程.

本文 2011 年 9 月 6 日收到, 2011 年 12 月 19 日收到修改稿.

¹通讯作者. 复旦大学数学科学学院, 非线性数学模型与方法重点实验室, 上海 200433.

E-mail: zyqin@fudan.edu.cn

²Department of Mathematics and Statistics, University of South Florida, Tampa, Florida 33620-5700, USA. E-mail: mawx@cas.usf.edu

³东华大学理学院应用数学系, 上海 201620. E-mail: hongcaima@dhu.edu.cn

*国家自然科学基金 (No. 10801037, No. 11071159), 外国专家局基金 (No. 61072147), 教育部博士点新教师基金 (No. 200802461007), 上海市自然科学基金与上海市重点学科建设项目 (No. J50101), 中央高校专项业务基金 (No. 2011D10902) 和复旦青年教师基金 (No. 1411018) 资助的项目.

本文主要研究带自由参数高阶变系数耦合非线性 Schrödinger 方程的 Painlevé 可积性. 通过标准 Painlevé 检验, 在一定参数约束下, 得到了两个新的子系统是 Painlevé 可积的.

2 Painlevé 分析

这部分主要是探讨带自由参数高阶变系数耦合非线性 Schrödinger 方程 (1.1) 的可积性. 为此, 首先引入

$$v = \bar{u}, \quad p = v, \quad q = \bar{v},$$

其中上划线 “ $\bar{}$ ” 代表共轭, 方程 (1.1) 可被写成

$$\begin{aligned} & iu_z + a(z)u_{tt} + bu(\alpha uv + \beta ab) + (b_1(z, t) + ic_1)u + ib_2u_t \\ & + ib_3(z)u_{ttt} + (b_4 + ic_2)u(uv + ab)_t + ib_5(u(uv + ab))_t = 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} & -iv_z + a(z)v_{tt} + bv(\alpha uv + \beta ab) + (b_1(z, t) - ic_1)v - ib_2v_t \\ & - ib_3(z)v_{ttt} + (b_4 - ic_2)v(uv + ab)_t - ib_5(v(uv + ab))_t = 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} & -ip_z + a(z)p_{tt} + bp(\beta uv + \gamma pq) + (b_1(z, t) + ic_1)p + ib_2p_t \\ & + ib_3(z)p_{ttt} + (b_4 + ic_2)p(uv + pq)_t + ib_5(p(uv + pq))_t = 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} & -iq_z + a(z)q_{tt} + bq(\beta uv + \gamma pq) + (b_1(z, t) - ic_1)q - ib_2q_t \\ & - ib_3(z)q_{ttt} + (b_4 - ic_2)q(uv + pq)_t - ib_5(q(uv + pq))_t = 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

其中

$$u = u(z, t), \quad v = v(z, t), \quad p = p(z, t), \quad q = q(z, t).$$

首先引入下面的罗朗展开:

$$\begin{cases} u = \sum_{j=0}^{\infty} u_j \phi^{j+\alpha_u}, & v = \sum_{j=0}^{\infty} v_j \phi^{j+\alpha_v}, \\ p = \sum_{j=0}^{\infty} p_j \phi^{j+\alpha_p}, & q = \sum_{j=0}^{\infty} q_j \phi^{j+\alpha_q}. \end{cases} \quad (2.5)$$

为了确定领头项, 将

$$u = u_0 \phi^{\alpha_u}, \quad v = v_0 \phi^{\alpha_v}, \quad p = p_0 \phi^{\alpha_p}, \quad q = q_0 \phi^{\alpha_q}$$

代入方程组 (2.1)–(2.4), 平衡主要项, 可得

$$\alpha_u = \alpha_v = \alpha_p = \alpha_q = -1$$

及条件

$$\begin{cases} b_4 = 0, \\ p_0 q_0 + u_0 v_0 = -\frac{6b_3(z)\phi_t^2}{2c_2 + 3b_5}. \end{cases} \quad (2.6)$$

而后, 将

$$u = \frac{u_0}{\phi} + u_j \phi^{j-1}, \quad v = \frac{v_0}{\phi} + v_j \phi^{j-1}, \quad p = \frac{p_0}{\phi} + p_j \phi^{j-1}, \quad q = \frac{q_0}{\phi} + q_j \phi^{j-1}$$

代入方程组 (2.1)–(2.4), 就会得到共振点在

$$-1, 0, 0, 0, 3, 4, 3 \pm 2\sqrt{-\frac{c_2}{2c_2 + 3b_5}}, 3 \pm 2\sqrt{-\frac{c_2}{2c_2 + 3b_5}}, 3 \pm 2\sqrt{-\frac{c_2}{2c_2 + 3b_5}},$$

其中, 由于不考虑负的共振点, 所以要求

$$3 \pm 2\sqrt{-\frac{c_2}{2c_2 + 3b_5}} \geq 0.$$

因为共振点要求是整数, 所以易得以下参数约束条件:

$$\sqrt{-\frac{c_2}{2c_2 + 3b_5}} = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0.$$

进而有下面 4 种情形:

(a) $27b_5 + 22c_2 = 0$, 可得

$$j = -1, 0, 0, 0, 0, 0, 3, 4, 6, 6, 6;$$

(b) $2c_2 + b_5 = 0$, 可得

$$j = -1, 0, 0, 0, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 4;$$

(c) $c_2 + b_5 = 0$, 可得

$$j = -1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 3, 4, 5, 5, 5;$$

(d) $c_2 = 0, b_5 \neq 0$, 可得

$$j = -1, 0, 0, 0, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4.$$

由 (2.6) 可知, 在 $j = 0$ 时, 有 3 个任意函数, 所以 (a) 不符合条件. 在 $j = 3$ 时不可能有 7 个任意函数, 所以 (d) 不符合条件. 因此只需要考虑 (b), (c) 这两种情况.

为了在验证相容条件时简化计算, 假定

$$\phi(z, t) = t + \psi(z).$$

情形 1 $2c_2 + b_5 = 0$, 共振点在

$$j = -1, 0, 0, 0, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 4.$$

此时考虑 (2.5) 的罗朗展开到 $j = 4$, 然后将这截断级数代入方程组 (2.1)–(2.4), 并取 ϕ^{-4} 系数为零, 可得

$$u_0 = \frac{3b_3(z)}{2v_0c_2} - \frac{p_0q_0}{v_0},$$

其中 v_0, p_0, q_0 是相应于共振点 $j = 0, 0, 0$ 的非零任意函数. 当 u_0 和 v_0 取为

$$u_0 = v_0 = \sqrt{-3\delta},$$

此时不存在任意函数, 这相当于 $r = 0$ (与文 [30] 吻合).

在 $j = 1$ 时, 取 ϕ^{-3} 的系数, 可得 u_1, v_1, p_1, q_1 的值:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{i}{6c_2b_3(z)}(2\alpha Bc_2u_0p_0q_0 + 6ic_2b_3(z)u_{0t} + 4c_2a(z)u_0 \\ &\quad + 3\alpha Bu_0b_3(z) - 2\alpha Bu_0c_2q_0p_0), \\ p_1 &= \frac{i}{6c_2b_3(z)}(6ic_2b_3(z)a_{0t} + 4c_2a(z)p_0 + 2\gamma Bc_2p_0^2q_0 \\ &\quad + 3\beta Bp_0b_3(z) - 2\beta Bc_2p_0^2q_0), \end{aligned}$$

其中 v_1 和 q_1 分别是 u_1 和 p_1 的复共轭.

在 $j = 2$ 共振条件成立时, 因为 u_2, v_2, p_2, q_2 中有 3 个任意函数, 这就要求

$$\begin{aligned} & (3\alpha bb_3(z) - 2\alpha bc_2 q_0 p_0 + 3\beta bb_3(z) + 4a(z)c_2 + 2\gamma bc_2 p_0 q_0) \\ & \times (-2\alpha c_2 q_0 p_0 + 3\alpha b_3(z) + 4\beta c_2 p_0 q_0 - 3\beta b_3(z) - 2\gamma c_2 p_0 q_0) = 0, \\ & (3\alpha bb_3(z) - 2\alpha bc_2 q_0 p_0 + 3b\beta b_3(z) + 4a(z)c_2 + 2\gamma bc_2 p_0 q_0) \\ & \times (-2\alpha c_2 q_0 p_0 + 3\alpha b_3(z) + 4\beta c_2 p_0 q_0 - 3\beta b_3(z) - 2\gamma c_2 p_0 q_0) = 0, \end{aligned}$$

进而有约束

$$\alpha = \beta = \gamma, \quad (2.7)$$

下文仍记此为 α .

在 $j = 3$ 时, 因为 u_3, v_3, p_3, q_3 中有 1 个任意函数, 共振条件要求

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{-3\alpha bb_3(z)}{2a(z)}, \\ \frac{iu_0(-2b_{2t}(z, t)b_3(z) + b'_3(z) + 2c_1 b_3(z))}{2\phi b_3(z)} &= 0, \end{aligned}$$

从中得到

$$a(z) = \frac{-3\alpha bb_3(z)}{2c_2}, \quad (2.8)$$

$$b_2(z, t) = \left(\frac{b'_3(z)}{2b_3(z)} + c_1 b_3(z) \right) t + \theta_1(z), \quad (2.9)$$

其中 $\theta_1(z)$ 是任意函数, 而且 $' = \frac{d}{dz}$.

在 (2.7)–(2.9) 的约束条件下, 重复上面的 Painlevé 测试, 可知共振条件在 $j = 0, 2, 3$ 处均满足. 然而, 欲使 u_4, v_4, p_4, q_4 为任意函数, 就要求

$$ic_2 b_{2tt}(z, t) + 2b_{1t}(z, t)c_2 + \alpha bb_{2t}(z, t) = 0.$$

由实部和虚部, 得

$$\begin{aligned} b_2(z, t)_{tt} &= 0, \\ 2b_{1t}(z, t)c_2 + \alpha bb_{2t}(z, t) &= 0, \end{aligned}$$

即

$$b_1(z, t) = -\frac{\alpha bb'_3(z) + 2\alpha bc_1 b_3^2(z)}{4c_2 b_3(z)} t + \theta_2(z), \quad (2.10)$$

其中 $\theta_2(z)$ 是任意函数.

在约束条件 (2.7)–(2.10) 下, 可证明方程组 (2.1)–(2.4) 是 Painlevé 可积的. 最后, 可

得到方程 (1.1) 的一个 Painlevé 可积的系统

$$\begin{cases} iu_z + \frac{-3\alpha bb_3(z)}{2c_2}u_{tt} + bu(\alpha|u|^2 + \beta|v|^2) + \left(-\frac{\alpha bb'_3(z) + 2\alpha bc_1 b_3^2(z)}{4c_2 b_3(z)}t + \theta_2(z)\right. \\ \left.+ ic_1\right)u + i\left(\frac{b'_3(z)}{2b_3(z)} + c_1 b_3(z)\right)t + \theta_1(z)u_t + ib_3(z)u_{ttt} + ic_2u(|u|^2 + |v|^2)_t \\ - 2ic_2(u(|u|^2 + |v|^2))_t = 0, \\ iv_z + \frac{-3\alpha bb_3(z)}{2c_2}v_{tt} + bv(\beta|u|^2 + \gamma|v|^2) + \left(-\frac{\alpha bb'_3(z) + 2\alpha bc_1 b_3^2(z)}{4c_2 b_3(z)}t \right. \\ \left.+ \theta_2(z) + ic_1\right)v + i\left(\frac{b'_3(z)}{2b_3(z)} + c_1 b_3(z)\right)t + \theta_1(z)v_t + ib_3(z)v_{ttt} \\ \left.+ ic_2v(|u|^2 + |v|^2)_t - 2ic_2(v(|u|^2 + |v|^2))_t = 0, \end{cases} \quad (2.11)$$

其中 θ_j ($j = 1, 2$) 是 z 的任意函数.

情形 2 $c_2 + b_5 = 0$, 共振点在 $j = -1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 3, 4, 5, 5, 5$.

将 (2.5) 的罗朗展开到 $j = 5$, 并将此截断级数代入方程组 (2.1)–(2.4), 令 ϕ^{-4} 的系数为零, 可得

$$u_0 = \frac{6b_3(z)}{v_0 c_2} - \frac{p_0 q_0}{v_0},$$

其中 v_0, p_0, q_0 是对应于 $j = 0, 0, 0$ 的 3 个非零的任意函数.

在 $j = 1$ 时, 令 ϕ^{-3} 为零, 可得

$$u_1 = \frac{iu_0(2a(z)c_2 + ic_2^2 p_0 q_1 + 6\alpha bb_3(z) - \alpha bc_2 q_0 p_0 + \beta bp_0 q_0 c_2 + ic_2^2 u_0 v_1 + ic_2^2 p_1 q_0)}{c_2(6b_3(z) - c_2 q_0 p_0)},$$

其中 v_1, p_1, q_1 是 3 个任意函数, 同时有

$$\begin{aligned} \frac{2(6b_3(z) - c_2 q_0 p_0)(6\alpha bb_3(z) + \beta bp_0 q_0 c_2 - \alpha bc_2 q_0 p_0 + 2a(z)c_2)}{u_0 c_2^2} &= 0, \\ -\frac{(6\alpha b_3(z) - \alpha c_2 q_0 p_0 + 2\beta p_0 q_0 c_2 - 6\beta b_3(z) - \gamma p_0 q_0 c_2)bp_0}{c_2} &= 0, \\ \frac{(4a(z)c_2 + 6\beta bb_3(z) + \gamma bq_0 p_0 c_2 + 6\alpha bb_3(z) - \alpha bc_2 q_0 p_0)q_0}{c_2} &= 0, \end{aligned}$$

即

$$\alpha = \beta = \gamma, \quad (2.12)$$

$$a(z) = -\frac{3\alpha bb_3(z)}{c_2}. \quad (2.13)$$

以后仍记作 α .

同理, 从 ϕ^{-2} 的系数可以得到 u_2, v_2, p_2, q_2 的值, 由于这些表达式过于繁琐, 为节省篇幅此处从略.

在共振点 $j = 3$ 处的共振条件要求

$$\frac{iu_0(2b_3(z)c_1 - 2b_3(z)b_{2t}(z, t) + b'_3(z))}{2\phi b_3(z)} = 0,$$

从中得到

$$b_2(z, t) = \left(\frac{b'_3(z)}{2b_3(z)} + c_1 b_3(z)\right)t + \theta_1(z), \quad (2.14)$$

其中 $\theta_1(z)$ 是任意函数而且 $' = \frac{d}{dz}$, 使得 u_3, v_3, p_3, q_3 中有 1 个任意函数.

在这些约束下, 重复做 Painlevé 测试, 可证 $j = 0, 1, 3, 4$ 的共振条件成立. 同理, 在 $j = 5$ 时共振条件在

$$b_1(z, t) = \theta_2(z)t + \theta_3(z) \quad (2.15)$$

的约束条件下成立, 其中 θ_2 和 θ_3 是 z 的任意函数.

在参数约束条件 (2.12)–(2.15) 下, 通过仔细地 Painlevé 分析, 可证耦合方程组 (1.1) 是 Painlevé 可积的. 最后, 可得方程 (1.1) 的另一个 Painlevé 可积系统

$$\begin{cases} iu_z - \frac{3\alpha b b_3(z)}{c_2} u_{tt} + i b_3(z) u_{ttt} + b u(\alpha |u|^2 + \beta |v|^2) \\ + (\theta_2(z)t + \theta_3(z) + i c_1) u + i \left(\frac{b'_3(z)}{2b_3(z)} + c_1 b_3(z) \right) t \\ + \theta_1(z) u_t + i c_2 u(|u|^2 + |v|^2)_t - i c_2 (u(|u|^2 + |v|^2))_t = 0, \\ i v_z - \frac{3\alpha b b_3(z)}{c_2} v_{tt} + i b_3(z) v_{ttt} + B v(\beta |u|^2 + \gamma |v|^2) \\ + (\theta_2(z)t + \theta_3(z) + i c_1) v + i \left(\frac{b'_3(z)}{2b_3(z)} + c_1 b_3(z) \right) t \\ + \theta_1(z) v_t + i c_2 v(|u|^2 + |v|^2)_t - i c_2 (v(|u|^2 + |v|^2))_t = 0, \end{cases} \quad (2.16)$$

其中 θ_j ($j = 1, 2, 3$) 是 z 的任意函数.

综上所述, 本文讨论了一类耦合的变系数高阶非线性 Schrödinger 方程 (1.1) 中两个新的 Painlevé 可积耦合模型, 即 (2.11) 和 (2.16), 通过 Painlevé 测试验证了它的可积性及其相应的约束条件. 通过 Painlevé 截断展开, 还可以求出其 Bäcklund 变换和精确解. 通过这种方法也可以验证添加 t 的更高阶导数项的耦合变系数的非线性 Schrödinger 方程的 Painlevé 可积性, 这些将在以后的工作中体现.

参 考 文 献

- [1] Ablowitz M J, Clarkson P A. Soliton, nonlinear evolution equations and inverse scattering [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- [2] Newell A C. Solitons in mathematics and physics [M]. Philadelphia: SIAM, 1985.
- [3] Drazin P G, Johnson R S. Soliton: an introduction [M]. New York: Cambridge University, 1989.
- [4] Matveev V B, Salle A M. Darboux transformation and solitons [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1991.
- [5] 谷超豪. 孤立子理论与应用 [M]. 杭州: 浙江科学技术出版社, 1990.
- [6] Ueda T, Kath W L. Dynamics of coupled solitons in nonlinear optical fibers [J]. *Phys Rev A*, 1990, 42:563–571.
- [7] Sahadevan R, Tamizhmanin K M, Lakshmanan M. Painlevé analysis and integrability of coupled nonlinear Schrödinger equation [J]. *J Phys A*, 1986, 19:1783–1791.

- [8] Hasegawa A, Tappert F. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion [J]. *Appl Phys Lett*, 1973, 23(3):142–144.
- [9] Mollenauer L F, Stolen R H, Gordon J P. Experimental observation of picosecond pulse narrowing and solitons in optical fibers [J]. *Phys Rev Lett*, 1980, 45:1095–1098.
- [10] Agrawal G P. Nonlinear fiber optics [M]. New York: Academic Press, 2001.
- [11] Hasegawa A. Optical solitons in fibers [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
- [12] Papannareddy R. Introduction to lightwave communication systems [M]. Boston: Artec House, 1997.
- [13] Hodel W, Weber H P. Decay of femtosecond higher-order solitons in an optical fiber induced by Raman self-pumping [J]. *Opt Lett*, 1987, 12(11):924–926.
- [14] Gedalin M, Scott T C, Band Y B. Optical solitons in the higher order nonlinear Schrödinger equation [J]. *Phys Rev Lett*, 1997, 78:448–451.
- [15] Ganapathy R, Kuriakose V C. Soliton interaction in a dispersion-decreasing fiber with effective gain and effective phase modulation [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2003, 15:99–105.
- [16] Weiss J, Tabor M, Carnevale G. The Painlevé property for partial differential equations [J]. *J Math Phys*, 1983, 24:522–526.
- [17] Weiss J. The Painlevé property for partial differential equations. II: Bäcklund transformation, Lax pairs, and the Schwarzian derivative [J]. *J Math Phys*, 1983, 24:1405–1413.
- [18] Musette M, Conter R. Algorithmic method for deriving Lax pairs from the invariant Painlevé analysis of nonlinear partial differential equations [J]. *J Math Phys*, 1991, 32:1450–1457.
- [19] Ma W X. Exact solutions to the Tu system through Painlevé analysis [J]. *J Fudan Univ Natur Sci*, 1994, 33(3):319–326.
- [20] Conte R. The Painlevé property — one century later [M]. New York: Springer-Verlag, 1999.
- [21] Zhang S L, Wu B, Lou S Y. Painlevé analysis and special solutions of generalized Broer-Kaup equations [J]. *Phys Lett A*, 2002, 300:40–48.
- [22] Bekir A. Painlevé test for some (2+1)-dimensional nonlinear equations [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2007, 32:449–455.
- [23] Ramani A, Grammaticos B, Bountis T. The Painlevé property and singularity analysis of integrable and nonintegrable systems [J]. *Phys Rep*, 1989, 180:159–245.
- [24] Lou S Y. Searching for higher dimensional integrable models from lower ones via painlevé analysis [J]. *Phys Rev Lett*, 1998, 80:5027–5032.
- [25] Lou S Y. Higher dimensional integrable models from the Kadomtsev-Petviashvili equation [J]. *J Math Phys*, 1998, 39:5364–5376.

- [26] Lv X, Tian B, Zhang H Q, et al. Integrability study on a generalized (2+1)-dimensional variable-coefficient Gardner model with symbolic computation [J]. *Chaos*, 2010, 20:043125–043128.
- [27] Sakovich S. Singularity analysis and integrability of a burgers-type system of Foursov [J]. *Symmetry Integrability and Geometry: Methods and Applicatoins*, 2011, 7:002–006.
- [28] Qin Z Y, Mu G. On Painlevé integrability and new solitary solutions for coupled Higgs equation [EB/OL]. *Int J Theor Phys*, DOI:10.1007/s10773-011-0972-y
- [29] Hase Y, Hirota R, Ohta Y, et al. Soliton solutions to the Mel'nikov Equations [J]. *J Phys Soc Japan*, 1989, 58(8):2713–2720.
- [30] Brugarino T, Sciacca M. Singularity analysis and integrability for a HNLS equation governing pulse propagation in a generic fiber optics [J]. *Optics Communications*, 2006, 262:250–256.
- [31] Kodama Y, Hasegawa A. Nonlinear pulse propagation in a monomode dielectric guide [J]. *IEEE J Quantum Electron*, 1987, 23:510–524.

Painlevé Integrability of Coupled Variable Coefficient Higher-Order Nonlinear Schrödinger Equations with Free Parameters

QIN Zhenyun¹ MA Wenxiu² MA Hongcai³

¹Corresponding author. School of Mathematical Sciences, Key Lab for Nonlinear Mathematical Models and Methods, Fudan University, Shanghai 200433, China. E-mail: zyqin@fudan.edu.cn

²Department of Mathematics and Statistics, University of South Florida, Tampa, Florida 33620-5700, USA. E-mail: mawx@cas.usf.edu

³Department of Applied Mathematics, College of Science, Donghua University, Shanghai 201620, China. E-mail: hongcaima@dhu.edu.cn

Abstract By means of the singularity analysis, the Painlevé integrability of the system of coupled variable coefficient higher-order nonlinear Schrödinger equations with free parameters is tested. It is shown that only two sub-systems possess the standard Painlevé property under some constraints on parameters for the Painlevé integrability.

Keywords Painlevé integrability, Nonlinear Schrödinger equation, Variable coefficient

2000 MR Subject Classification 35Q51, 37K05, 37K10, 37K40

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 33 No. 2, 2012

by ALLERTON PRESS, INC., USA