

关于推广的 KdV 方程的孤波解*

马文秀 周德堂

复旦大学数学研究所, 上海 200433

1993 年 1 月 8 日

修正了文献[5]中推广的 KdV 方程传播波解的形变理论, 并提出了一个相关的代数方程有非零实根的充要条件, 从而指出了文献[5]中的一个分析错误. 最后直接从推广的 KdV 方程本身给出了由形变理论生成的孤波解的显式公式.

PACC: 0340K; 0290

一、引 言

考虑推广的 KdV 方程

$$u_t + 2\mu uu_x + \nu u_{3x} + \delta u_{5x} = 0, \quad (1)$$

其中 μ, ν, δ 为常数, 且 $\mu, \nu, \delta \neq 0$. 这个方程是许多物理问题中描述的模型方程^[1,2], 它首先在研究冷等离子体中的磁声波时被导出^[3]. 方程(1)包含有 5 阶色散项且只有 3 个多项式守恒律.

最近朱佐农^[5]在文献[4]的基础上, 通过形变理论描述了方程(1)的一种传播波解

$$u = u(\eta) = B_0 + B_1 U(\eta) + B_2 U^2(\eta), \quad \eta = kx - \omega t - \eta_0, \quad (2)$$

其中 $U(\eta)$ 由下式确定:

$$U_{\eta\eta} = C_1 + vU + 3U^2, U_{\eta}^2 = C_2 + 2C_1 U + vU^2 + 2U^3, \quad (3)$$

而 B_0, B_1, B_2, k, ω 满足下列关系式:

$$B_1 = -\frac{70\nu}{13\mu}k^2 - \frac{70v\delta}{\mu}k^4, \quad B_2 = -\frac{210\delta}{\mu}k^4, \quad (4a)$$

$$W = 2\mu B_0 k + \nu k^3(v + 6C_1 \frac{B_2}{B_1}) + \delta k^5[18C_1 + v^2(30C_1 v + 60C_2) \frac{B_2}{B_1}], \quad (4b)$$

并且波数 k 由 6 次代数方程 $a_6 + a_8 k^2 + a_{10} k^4 + a_{12} k^6 = 0$ 确定, 其中 a_6, a_8, a_{10}, a_{12} 由文献[5]中(17)式给出. 当选取

$$U(\eta) = C'_0 - \frac{v + 6C'_0}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2} \sqrt{v + 6C'_0} \eta\right) \quad (5)$$

时, 容易从(3)式推得

$$C_1 = -vC'_0 - 3C'^2_0, \quad C_2 = vC'^2_0 + 4C'^3_0. \quad (6)$$

我们将指出由文献[5]的(17)式确定的 a_8, a_{10} 是不妥的, 对此作了修正. 而且当 C_1, C_2

* 复旦大学青年科学基金资助的项目.

由(6)式给定时,将给出修正的波数 k 满足的 6 次代数方程有非零实根的充要条件和非零实根的表达式,从而也纠正了文献[5]中的分析错误. 并且将直接讨论由(2), (5)式确定的函数为(1)式的孤波解的可能性,同时给出这种显式的精确孤波解.

二、形变理论的修正与可行条件

设 $U(\eta)$ 由(3)式确定并假定 U, U^2, U^3, U^4 线性独立,那么直接计算可表明^[5], (2)式给出的 u 是推广的 KdV 方程(1)的解,当且仅当 B_1, B_2, k, w 满足(4)式和下式(即文献[5]中的(15)式):

$$2\mu B_1^3 + \nu k^2(6B_1^2 + 8vB_1B_2) + \delta k^4(30vB_1^2 + 336C_1B_1B_2 + 32v^2B_1B_2) - 2B_2\{\nu k^2(vB_1 + 6C_1B_2) + \delta k^4[(18C_1 + v^2)B_1 + (30C_1v + 60C_2)B_2]\} = 0. \quad (7)$$

注意(4)式,可简化(7)式为 $a_6k^6 + a_8k^8 + a_{10}k^{10} + a_{12}k^{12} = 0$, (8)

其中 a_6, a_8, a_{10} 和 a_{12} 由下列各式确定:

$$a_6 = -\frac{3038 \times 10^2 \nu^3}{(13)^3 \mu^2} = -\frac{62 \times (70)^2 \nu^3}{(13)^3 \mu^2}, \quad a_8 = 0, \quad (9a)$$

$$a_{10} = \frac{42 \times (70)^2 \nu \delta^2}{13 \mu^2} (v^2 - 12C_1), \quad (9b)$$

$$a_{12} = -\frac{98 \times 10^3 v^3 \delta^3}{\mu^2} + \frac{40 \times (210)^2 C_1 v \delta^3}{\mu^2} - \frac{120 \times (210)^2 C_2 \delta^3}{\mu^2}. \quad (9c)$$

因此,由文献[5]的(17)式给出的 a_8, a_{10} 是错误的. a_8, a_{10} 正确的表达式应由(9)式给出.

当 $U(\eta)$ 由(5)式确定时,常数 C_1, C_2 由(6)式给出,进一步不难算出

$$a_{10} = \frac{42 \times (70)^2 \nu \delta^2}{13 \mu^2} (v + 6C'_0)^2, \quad a_{12} = -98 \times 10^3 (v + 6C'_0)^3 \frac{\delta^3}{\mu^2}. \quad (10)$$

因此当 $\nu\delta < 0$ 时,总有 $a_6 a_{12} < 0$,故(8)式有两个非零实根,进一步可得方程(1)的两个精确的孤波解. 但当 $\nu\delta > 0$ 时,(8)式有没有非零实根不容易得出. 为此对(8)式作因子分解. 令

$$F(y) = a_6 + a_8 y + a_{10} y^2 + a_{12} y^3, \quad a = \frac{\nu}{12(v + 6C'_0)\delta}. \quad (11)$$

明显地 $F(-a) = 0$,故 $F(y)$ 可分解如下:

$$F(y) = (y + a)(b_1 y^2 + b_2 y + b_3), \quad (12)$$

其中系数 b_1, b_2, b_3 由下式确定:

$$b_1 = a_{12} = -98 \times 10^3 (v + 6C'_0)^3 \frac{\delta^3}{\mu^2}, \quad (13a)$$

$$b_2 = a_{10} - ab_1 = \frac{62 \times (70)^2 \nu \delta^2}{13 \mu^2} (v + 6C'_0)^2, \quad (13b)$$

$$b_3 = a_6 - ab_2 = -\frac{62 \times (70)^2 \nu^2 \delta}{13^2 \mu^2} (v + 6C'_0). \quad (13c)$$

直接计算可得 $b_2^2 - 4b_1 b_3 = -\frac{1116 \times (70)^4 \nu^2 \delta^4}{(13)^2 \mu^4} (v + 6C'_0)^4 < 0$.

故(8)式当 $\nu\delta > 0$ 时没有非零实根. 这也说明文献[5]认为(8)式总有非零实根有误. 从分解式(12)还可知:当 $\nu\delta < 0$ 时,(8)式有仅有下列两个非零实根:

$$k = \pm \sqrt{-\frac{\nu}{13(\nu + 6C'_0)\delta}}. \quad (14)$$

特别地,当(5)式中的 ν 为零时, $F(y)=0$ 即为文献[5]的(16')式,

$$G(y) = \frac{31}{(13)^2}\nu^3 - 756C'_0{}^2\nu\delta^2y^2 + 28080C'_0{}^3\delta^3y^3 = 0. \quad (15)$$

$$G(y) \text{ 可分解为如下: } G(y) = (y + \bar{a})(\bar{b}_1y^2 + \bar{b}_2y + \bar{b}_3), \quad (16)$$

其中 $\bar{a}, \bar{b}_i, 1 \leq i \leq 3$, 由下式给出:

$$\bar{a} = \frac{\nu}{78C'_0\delta}, \bar{b}_1 = 28080C'_0{}^3\delta^3, \bar{b}_2 = -1116C'_0{}^2\nu\delta^2, \bar{b}_3 = \frac{186C'_0{}^2\nu^2\delta}{13}. \quad (17)$$

$$\text{此时有 } \bar{b}_2^2 - 4\bar{b}_1\bar{b}_3 = -361584C'_0{}^4\nu^2\delta^4 < 0. \quad (18)$$

因此, (15)式只当 $\nu\delta < 0$ 时才存在正实根, 且正实根为 $-\bar{a}$, 继而推知文献[5]判断(15)式总有正实根有误.

顺便指出, 文献[5]中的(27)式不是 KdV 方程的新解. 因为

$$\begin{aligned} U(\xi) &= \lambda \left\{ \frac{1}{2} - \frac{4Ce^{\sqrt{2\lambda}(x+\lambda-C_1)}}{(C+e^{\sqrt{2\lambda}(x+\lambda-C_1)})^2} \right\} \\ &= \lambda \left\{ \frac{1}{2} - \operatorname{sech}^2 \frac{1}{2} [\sqrt{2\lambda}(x+\lambda-C_1) - \ln C] \right\}, \end{aligned}$$

故 $U(\xi)$ 即是众知的单孤子解.

三、显式的孤波解

本节从直接计算的角度来阐明推广的 KdV 方程, (1) 只当有 $\nu\delta < 0$ 时, 才能有如下形式的非常值实孤波解:

$$u = A_1 \operatorname{sech}^4 \xi + A_2 \operatorname{sech}^2 \xi + E, \xi = kx - \omega t + \xi_0, \quad (19)$$

其中 $A_1, A_2, E, k, \omega, \xi_0$ 为待定常数, 因而从另一角度说明文献[5]中定理的结论是有误的.

令 $u = u(\xi) = u(kx - \omega t + \xi_0)$, 则方程(1)变为

$$-\omega u^{(1)} + 2\mu k u u^{(1)} + \nu k^3 u^{(3)} + \delta k^5 u^{(5)} = 0, u^{(i)} = \frac{d^i u}{d\xi^i}.$$

$$\text{上式积分一次得到 } -\omega u + \mu k u^2 + \nu k^3 u^{(2)} + \delta k^5 u^{(4)} = K, \quad (20)$$

其中 K 为积分常数. 将(19)式代入(20)式可知, (20)式要求下列系数条件:

$$\mu k A_1^2 + 840\delta k^5 A_1 = 0, \quad (21a)$$

$$2\mu k A_1 A_2 - 20\nu k^3 A_1 - 1040\delta k^5 A_1 + 120\delta k^5 A_2 = 0, \quad (21b)$$

$$(-\omega + 2\mu k E) A_1 + \mu k A_2^2 + 16\nu k^3 A_1 - 6\nu k^3 A_2 + 256\delta k^5 A_1 - 120\delta k^5 A_2 = 0, \quad (21c)$$

$$(-\omega + 2\mu k E) A_2 + 4\nu k^3 A_2 + 16\delta k^5 A_2 = 0. \quad (21d)$$

在讨论中总假定 $k \neq 0$ 且 $A_1^2 + A_2^2 \neq 0$, 否则得到平庸解即常值解.

情形 1: 如果 $A_1 = 0$, 则由(21b)式推得 $A_2 = 0$, 矛盾.

情形 2: 如果 $A_1 A_2 \neq 0$, 则由(21a), (21b)和(21d)式分别可得 $A_1 = -\frac{840}{\mu} \delta k^4, A_2 = \frac{1}{13\mu}$

$(140\nu k^2 + 7280\delta k^4), w = 4\nu k^3 + 16\delta k^5 + 2\mu kE$. 将这些表示式代入(21c)式得到

$$31\nu^2 - 2232\nu\delta k^2 + 27040\delta^2 k^4 = 0. \quad (22)$$

这个方程的判别式小于零,因此无实解 k .

情形 3: 如果 $A_2=0$, 则当 $\nu\delta>0$ 时(21d)式明显无实解 k , 当 $\nu\delta<0$ 时(21)式有解,

$$k = \pm \frac{1}{2} \left(-\frac{\nu}{13\delta}\right)^{\frac{1}{2}}, A_1 = -\frac{105\nu^2}{338\mu\delta}, w = \pm \left(\mu E - \frac{18\nu^2}{169\delta}\right) \left(-\frac{\nu}{13\delta}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (23)$$

综上所述可得: 当 $\nu\delta>0$ 时, 方程(1)有形如(19)式的非常值的实孤波解(但有复孤波解^[6]); 当 $\nu\delta<0$ 时, 方程(1)有如下形如(19)式的非常值的实孤波解^[7,8]:

$$u = A_1 \operatorname{sech}^4(kx - wt + \xi_0) + E, \quad (24)$$

其中 A_1, k, w 由(23)式确定, ξ_0, E 为任意常数. 因形如(2), (5)式的解包含在(19)式中, 因此(24)式即是第二节中形变理论生成的孤波解, 这里给出了这种孤波解的显式表达式.

作者衷心感谢谷超豪教授和胡和生教授的鼓励和引导, 审者提出了文献[5]中(27)式不是新解的意见, 在此一并致谢!

[1] K. Yoshimura, *J. Phys. Soc., Jpn.*, **51**(1982), 3025.

[2] 戴世强, 应用数学与力学, **3**(1982), 721.

[3] T. Kakutani and H. Ono, *J. Phys. Soc., Jpn.*, **26**(1969), 1305.

[4] 陈德芳、楼森岳, 物理学报, **40**(1991), 513.

[5] 朱佐农, 物理学报, **41**(1992), 1057.

[6] W. X. Ma and D. T. Zhou, A Kind of Explicit Solutions to a Higher Order KdV Equation, 1992, preprint.

[7] G. X. Huang, S. Y. Lon and X. X. Dai, *Phys. Lett., A*, **139**(1989), 373.

[8] A. Jeffrey and M. N. B. Mohamad, *Chaos, Solitons & Fractals.*, **1**(1991), 187.

ON SOLITARY WAVE SOLUTIONS TO A GENERALIZED KdV EQUATION

MA WEN-XIU ZHOU DE-TANG

Institute of Mathematics, Fudan University, Shanghai 200433

(Received 8 January 1993)

ABSTRACT

The deformation theory, in Ref [5], of travelling wave solutions to a generalized KdV equation is modified. The necessary and sufficient condition for a relevant algebraic equation to possess nonzero real root is presented and thus an error of analyses in Ref. [5] is pointed out. Finally an explicit formula of the solitary wave solutions generated by deformation theory is obtained directly from the generalized KdV equation itself.

PACC: 0340K; 0290