

基于 Riemann-Hilbert 问题建模求解孤立子解

马文秀¹, 董焕河²

(1. 美国南佛罗里达大学 数学与统计系, 美国佛罗里达州 坦帕市, 33620-5700;

2. 山东科技大学 数学与系统科学学院, 山东 青岛 266590)

摘要: 基于矩阵谱问题构造了一种实用的方法来对一类实轴上的可积方程的 Riemann-Hilbert 问题进行建模。当跳跃矩阵是单位矩阵时, 孤立子解通过特殊约化的 Riemann-Hilbert 问题显性表示。作为一个范例, 对于具有任意阶矩阵谱问题的多分量非线性薛定谔方程, 给出了该方法的具体应用。

关键词: 矩阵谱问题; Riemann-Hilbert 问题; 孤立子解

中图分类号: 35Q53; 37K10; 37K20

文献标志码: A

文章编号: 2095-3070(2017)03-0016-10

0 引言

众所周知, 反散射方法和 Riemann-Hilbert 方法是孤立子理论中研究可积方程的两个非常重要的技术。前者给出了非线性傅里叶方法, 用于处理可积方程的 Cauchy 问题^[1], 后者提供了一种等价的但更直接的方法来求解可积方程, 尤其是求解孤立子解^[2]。

Riemann-Hilbert 方法从一类具有可解析延拓到上半平面或下半平面的有界特征函数的矩阵谱问题开始, 在确定散射系数时, 实轴上无穷远点处的正则化条件常被用来求解相应的 Riemann-Hilbert 问题^[2]。当跳跃矩阵为单位矩阵时, 通过约化的 Riemann-Hilbert 问题可以得到可积方程的孤立子解。从一般孤立子解的特定的极限, 可以得到 lump 解、周期解以及复杂子解。Riemann-Hilbert 方法已广泛应用到许多可积方程, 如多波相互作用方程^[2]、一般耦合非线性薛定谔方程^[3]、Harry Dym 方程^[4]、广义的 Sasa-Satsuma 方程^[5]以及 Dullin-Gottwald-Holm 方程^[6]。更进一步, 可积方程的长时间渐近性和弱色散极限可以通过建立关联 Riemann-Hilbert 问题的渐近性质来探讨^[7-8]。文献[8]中所提出的这种方法现在被称为非线性最速下降法。

本文通过一个 Riemann-Hilbert 方法在多分量非线性薛定谔方程中应用的例子, 结合任意阶空间矩阵谱问题, 构造了一种实用的方法来模拟构建一类实轴上可积方程的 Riemann-Hilbert 问题, 并对由矩阵谱问题产生的可积方程, 构造了它的孤立子解。一般过程由以下两步组成: 第一步是从产生可积方程的空间矩阵谱问题出发, 构造一类具有空间变量的 Riemann-Hilbert 问题; 第二步是通过求解特殊的关联 Riemann-Hilbert 问题, 显式地计算出可积方程的孤子解。

论文主要的结构如下: 第1节部分, 针对与可积方程给定矩阵谱问题有关的 Riemann-Hilbert 问题的建模, 给出了一个标准过程; 第2节, 利用零曲率方程(或 Lax 对^[9]), 基于一个适合 Riemann-Hilbert 理论的任意阶矩阵谱问题, 提出了多分量非线性薛定谔方程及其递归算子; 第3节, 对于多分量非线性薛定谔方程, 分析了矩阵特征函数的等价空间矩阵谱问题的性质, 建立了一类与新引入的空间矩阵谱问题相关的 Riemann-Hilbert 问题; 第4节, 从实轴上的特殊关联 Riemann-Hilbert 问题构造了多分量非线性薛定谔方程的孤子解, 其中跳跃矩阵是单位矩阵; 在最后一节, 对论文进行总结并给出了一些需要

收稿日期: 2017-07-28

基金项目: 国家自然科学基金(11371326); 美国国家科学基金会(DMS-1664561); 中国高等学校学科创新引智计划(111项目)(b16002)

通讯作者: 董焕河, E-mail: donghuanhe@126.com

进一步研究的问题。

1 Riemann-Hilbert 问题建模

对从矩阵谱问题出发的实轴上的 Riemann-Hilbert 问题进行建模的标准过程概括如下。

对具有下列形式的矩阵谱问题：

$$-i\varphi_x = U\varphi, \quad -i\varphi_t = V\varphi, \quad U = A(\lambda) + P(u, \lambda), \quad V = B(\lambda) + Q(u, \lambda),$$

其中： i 是虚数单位； λ 是谱参数； u 是位势； φ 是一个 $m \times m$ 阶矩阵的特征函数； A, B 是 $m \times m$ 阶常数可交换矩阵； P, Q 是 $m \times m$ 阶无迹矩阵。两个矩阵谱问题的相容条件是零曲率方程：

$$U_t - V_x + i[U, V] = 0, \quad (1)$$

其中， $[\cdot, \cdot]$ 是矩阵换位子。矩阵 U 和 V 称为方程(1)的一个 Lax 对^[9]。为构造一类由零曲率方程生成的可积方程的 Riemann-Hilbert 问题，采用下面的一对等价矩阵谱问题：

$$\psi_x = i[A(\lambda), \psi] + P(u, \lambda)\psi, \quad \psi_t = i[B(\lambda), \psi] + Q(u, \lambda)\psi,$$

其中： ψ 是一个 $m \times m$ 阶矩阵的特征函数； $P = iP$ 且 $Q = iQ$ 。

矩阵 A 和 B 的可交换性保证了两类矩阵谱问题的等价性。两矩阵的特征函数 φ 和 ψ 之间的关系可以由 $\varphi = \psi E_g, E_g = e^{iA(\lambda)x + iB(\lambda)t}$ 给出。对于上述的第二类矩阵谱问题，期望得到具有典型的渐近性条件的两个解析矩阵的特征函数：

$$\psi^\pm(x, t, \lambda) \rightarrow I_m, \text{ 当 } x, t \rightarrow \pm \infty,$$

其中， I_m 表示 m 阶单位矩阵。

现在，基于这两个矩阵的特征函数 $\psi^\pm(x, t, \lambda)$ ，需要确定分别在上半平面和下半平面解析的两个解析矩阵函数 $P^\pm(x, t, \lambda)$ ，用于构造一类实轴上的 Riemann-Hilbert 问题：

$$G^+(x, t, \lambda) = G^-(x, t, \lambda)G(x, t, \lambda), \lambda \in \mathbf{R},$$

其中：

$$G^+(x, t, \lambda) = \lim_{\mu \in \mathbf{C}^+, \mu \rightarrow \lambda} P^+(x, t, \mu); \quad (G^-)^{-1}(x, t, \lambda) = \lim_{\mu \in \mathbf{C}^-, \mu \rightarrow \lambda} P^-(x, t, \mu), \lambda \in \mathbf{R};$$

$$G(x, t, \lambda) = P^-(x, t, \lambda)P^+(x, t, \lambda), \lambda \in \mathbf{R}.$$

论文中分别用 $\mathbf{C}^+$ 和 $\mathbf{C}^-$ 表示上半平面和下半平面，即

$$\mathbf{C}^+ = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}, \quad \mathbf{C}^- = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im}(z) < 0\}.$$

当跳跃矩阵 G 为单位矩阵 I_m 时，可以显式求解 Riemann-Hilbert 问题，并给出其孤子解。问题的关键是观察矩阵函数 $P^\pm$ 在 λ 的无穷远处的渐近行为，这也为已建立的 Riemann-Hilbert 问题提供了规范的正规化条件。

实际上，考虑空间变量的 Riemann-Hilbert 问题，并通过观察由具有空间变量 x 的 Riemann-Hilbert 问题产生的 $P^\pm(x, \lambda)$ 核中的向量的时间依赖性来确定孤立子解的时间依赖性。

2 多分量非线性薛定谔方程

令 n 是一个任意的自然数。考虑以下 $n+1$ 阶矩阵谱问题：

$$-i\varphi_x = U\varphi = U(u, \lambda)\varphi, \quad U = (U_{jl})_{(n+1) \times (n+1)} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \lambda & p \\ q & \alpha_2 \lambda I_n \end{bmatrix} = \lambda \Lambda + P, \quad (2)$$

其中： α_1 和 α_2 是实常数， λ 是谱参数， u 是 $2n$ 维位势函数，

$$u = (p, q^T)^T, \quad p = (p_1, p_2, \dots, p_n), \quad q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T, \quad (3)$$

并且 Λ 和 P 定义为

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 I_n \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & p \\ q & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

特别地，当 $p_j = q_j = 0, 2 \leq j \leq n$ 时，把方程(2)转化为标准 AKNS 矩阵谱问题^[10]。因此方程(2)被称为多分量 AKNS 矩阵谱问题，它的关联族被称为多分量 AKNS 可积族。由于 Λ 的多重特征值的存在性，

矩阵谱问题(2) 是退化的。本文中所使用的矩阵谱问题和文献[11] 中所用的矩阵谱问题的一个区别就在于式(2) 中单位虚根 i 的引入。

为了获得相关的多分量非线性薛定谔方程,取

$$-i\varphi_t = V\varphi, \quad V = \lambda^2 \Omega + Q, \quad (5)$$

其中:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 I_n \end{bmatrix}; Q = \frac{\beta}{\alpha} \lambda \begin{bmatrix} 0 & p \\ q & 0 \end{bmatrix} - \frac{\beta}{\alpha^2} \begin{bmatrix} pq & ip_x \\ -iq_x & qp \end{bmatrix}; \quad (6)$$

这里: $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$; $\beta = \beta_1 - \beta_2$ 。相容性条件,即方程(2) 和(5) 的零曲率公式,给出了多分量非线性薛定谔方程:

$$p_{j,t} = -\frac{\beta}{\alpha^2} i [p_{j,xx} + 2(\sum_{l=1}^n p_l q_l) p_j], 1 \leq j \leq n, \quad (7)$$

$$q_{j,t} = \frac{\beta}{\alpha^2} i [q_{j,xx} + 2(\sum_{l=1}^n p_l q_l) q_j], 1 \leq j \leq n. \quad (8)$$

对于 $n = 2$, 在一种特殊的对称约化情形下,多分量非线性薛定谔方程可以简化为 Manakov 方程^[12]。由此,文献[13] 中提出了一类有限维 Hamilton 可积系统的分解。

通过应用迹恒等式^[14],或者更一般地来说,应用变分恒等式^[15-16],可证明多分量非线性薛定谔方程(7)–(8) 具有双 Hamiltonian 结构。它的双 Hamiltonian 结构为:

$$u_t = J_1 \frac{\delta \tilde{H}_1}{\delta u} = J_2 \frac{\delta \tilde{H}_2}{\delta u},$$

其中 Hamiltonian 对如下所示:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & \alpha I_n \\ -\alpha I_n & 0 \end{bmatrix},$$

$$J_2 = i \begin{bmatrix} p^T \partial^{-1} p + (p^T \partial^{-1} p)^T & -(\partial + \sum_{j=1}^n p_j \partial^{-1} q_j) I_n - p^T \partial^{-1} q^T \\ -(\partial + \sum_{j=1}^n p_j \partial^{-1} q_j) I_n - q \partial^{-1} p & q \partial^{-1} q^T + (q \partial^{-1} q^T)^T \end{bmatrix},$$

并且双 Hamiltonian 泛函可以由下式确定:

$$\tilde{H}_1 = \int \left\{ -\frac{\beta}{3\alpha^3} i [3(pq)^2 + pq_{xx} - p_x q_x + p_{xx} q] \right\} dx,$$

$$\tilde{H}_2 = \int \left[-\frac{\beta}{2\alpha^2} (pq_x - p_x q) \right] dx.$$

同时,多分量非线性薛定谔方程的双 Hamiltonian 算子对可导出递归算子,这一点可以直接证明或者从双 Hamiltonian 结构推出:

$$\Phi = J_2 J_1^{-1} = \frac{i}{\alpha} \begin{bmatrix} -(\partial + \sum_{j=1}^n p_j \partial^{-1} q_j) I_n - p^T \partial^{-1} q^T & -p^T \partial^{-1} p - (p^T \partial^{-1} p)^T \\ q \partial^{-1} q^T + (q \partial^{-1} q^T)^T & (\partial + \sum_{j=1}^n q_j \partial^{-1} p_j) I_n + q \partial^{-1} p \end{bmatrix}.$$

伴随对称约束(或等价的对称约束)可以将多分量非线性薛定谔方程分解为两个可交换的有限维的 Liouville 可积 Hamiltonian 系统^[11,18]。

3 相关的 Riemann-Hilbert 问题

令 u, p, q 如式(3) 中所定义,考虑多分量非线性薛定谔方程(7)–(8) 的矩阵谱问题:

$$-i\varphi_x = U\varphi = U(u, \lambda)\varphi, \quad (9)$$

$$-i\varphi_t = V\varphi = V(u, \lambda)\varphi, \quad (10)$$

其中 Lax 对记作: $U = \lambda A + P$, $V = \lambda^2 \Omega + Q$, 且 A, Ω, P 和 Q 如式(4) 和(6) 中所定义。

接下来, 希望通过建立关联的 Riemann-Hilbert 问题来分析多分量非线性薛定谔方程的散射和反散射, 进而得到的结果将为产生孤立子解奠定基础^[2] (也可见文献[20—21])。假设所有 $2n$ 个位势在 $x \rightarrow \pm\infty$ 或者 $t \rightarrow \pm\infty$ 的情形下都快速趋于零, 并且满足下列可积条件:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{m_1} |t|^{m_2} \sum_{j=1}^n (|p_j| + |q_j|) dx dt < \infty, \quad m_1, m_2 \geq 0. \quad (11)$$

为了便于表达, 也假设

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 > 0, \beta = \beta_1 - \beta_2 > 0. \quad (12)$$

对于矩阵谱问题(9)–(10), 注意到, 在满足条件式(11) 的情形下, 当 $x, t \rightarrow \pm\infty$ 时, 有下列渐近性: $\varphi \sim e^{i\lambda x + i\lambda^2 t} \Omega$ 。因此, 做下述变量变换

$$\varphi = \psi E_g, \quad E_g = e^{i\lambda x + i\lambda^2 t} \Omega,$$

当 $x, t \rightarrow \pm\infty$ 时, 可以有矩阵谱问题(9)–(10) 的规范化条件, $\psi \rightarrow I_{n+1}$ 。

同样, 取 $\tilde{P} = iP$ 和 $\tilde{Q} = iQ$, 关于矩阵谱问题(9)–(10) 的等价对记作:

$$\psi_x = i\lambda[A, \psi] + P\psi, \quad (13)$$

$$\psi_t = i\lambda^2[\Omega, \psi] + Q\psi. \quad (14)$$

由于 $\text{tr}(P) = \text{tr}(Q) = 0$, 利用广义的 Liouville 公式^[22] 可以得到:

$$\det \psi = 1. \quad (15)$$

现在, 按照在第1 部分中介绍的一般建模过程, 引入一类具有变量 x 的关联 Riemann-Hilbert 问题。在散射问题中, 首先需要取矩阵谱问题(13) 分别在渐近条件

$$\psi^\pm \rightarrow I_{n+1}, \text{ 当 } x \rightarrow \pm\infty, \quad (16)$$

下的两个矩阵解 $\psi^\pm$, 其中, 上标 $\pm$ 是指边界条件所需的 x 轴的正、负端。由式(15), 可以得出对所有的 $x \in \mathbb{R}$, 有 $\det \psi^\pm = 1$ 。因为

$$\varphi^\pm = \psi^\pm E, \quad E = e^{i\lambda x}$$

都是矩阵谱问题(9) 的矩阵解, 并且线性相关, 因此它们的关系可以陈述如下:

$$\psi^- E = \psi^+ E S(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

其中, $S(\lambda) = (s_{jl})_{(n+1) \times (n+1)}$ 称为散射矩阵。注意由于 $\det \psi^\pm = 1$, 则 $\det S(\lambda) = 1$ 。

接着, 通过参数变分法, 将矩阵谱问题(13) 转化为下述关于 $\psi^\pm$ 的 Volterra 积分方程

$$\psi^-(\lambda, x) = I_{n+1} + \int_{-\infty}^x e^{i\lambda(y-x)} P(y) \psi^-(\lambda, y) e^{i\lambda(x-y)} dy, \quad (18)$$

$$\psi^+(\lambda, x) = I_{n+1} - \int_{-\infty}^x e^{i\lambda(y-x)} P(y) \psi^+(\lambda, y) e^{i\lambda(x-y)} dy, \quad (19)$$

这里使用了边界条件(16)。由此推出, 只要上述式子中右侧的广义积分收敛, $\psi^\pm$ 可以沿实轴 $\lambda \in \mathbb{R}$ 向外解析延拓。

基于 A 的对角形式及和式(12) 中的第一个假设 $\alpha > 0$, 可以容易看出, 因为在 ψ^- 的第1 列积分方程中只包含指数因子 $e^{-i\alpha\lambda(y-x)}$, 且当 λ 在上半平面 $\mathbb{C}^+$ 时, 积分中 $y < x$, $e^{-i\alpha\lambda(y-x)}$ 衰减, 同时, 在 ψ^+ 的后面 n 列积分方程中只包含指数因子 $e^{i\alpha\lambda(y-x)}$, 且当 λ 在上半平面 $\mathbb{C}^+$ 时, 积分中 $y > x$, $e^{i\alpha\lambda(y-x)}$ 也衰减, 所以这 $n+1$ 列向量函数可以解析延拓到上半平面 $\mathbb{C}^+$ 。类似的方式, 也可以推出 ψ^- 的后面 n 列以及 ψ^+ 的第1 列可以解析延拓到下半平面 $\mathbb{C}^-$ 。

从现在开始, 要确定两个矩阵特征函数 $P^\pm(x, \lambda)$, 它们可分别解析延拓到上半平面或下半平面。用下列符号表示:

$$\psi^\pm = (\psi_1^\pm, \psi_2^\pm, \dots, \psi_{n+1}^\pm),$$

即 $\psi_j^\pm$ 表示 $\psi^\pm$ ($1 \leq j \leq n+1$) 的第 j 列。因此, 矩阵解

$$P^+ = P^+(x, \lambda) = (\psi_1^-, \psi_2^+, \dots, \psi_{n+1}^+) = \psi^- H_1 + \psi^+ H_2 \quad (20)$$

在 $\lambda \in \mathbf{C}^+$ 解析, 矩阵解

$$(\psi_1^+, \psi_2^-, \dots, \psi_{n+1}^-) = \psi^+ H_1 + \psi^- H_2$$

在 $\lambda \in \mathbf{C}^-$ 解析, 其中 H_1 和 H_2 是定义如下的两个方阵

$$H_1 = \text{diag}(1, \overbrace{0, \dots, 0}^n), \quad H_2 = \text{diag}(0, \overbrace{1, \dots, 1}^n).$$

另一方面, 利用 Volterra 积分方程(18)–(19), 可以确定

$$P^+(x, \lambda) \rightarrow I_{n+1}, \quad \text{当 } \lambda \in \mathbf{C}^+ \rightarrow \infty$$

和

$$(\psi_1^+, \psi_2^-, \dots, \psi_{n+1}^-) \rightarrow I_{n+1}, \quad \text{当 } \lambda \in \mathbf{C}^- \rightarrow \infty.$$

其次, 通过伴随矩阵谱问题, 构造定义在下半平面 $\mathbf{C}^-$ 的解析对应. 式(9) 和(13) 的伴随方程分别定义为

$$i\tilde{\phi}_x = \tilde{\phi}U$$

和

$$i\tilde{\psi}_x = \lambda[\tilde{\psi}, \Lambda] + \tilde{\psi}P.$$

由于 $\phi^\pm$ 和 $\psi^\pm$ 是矩阵谱问题(9) 和(13) 的解, 则逆矩阵 $\tilde{\phi}^\pm = (\phi^\pm)^{-1}$ 和 $\tilde{\psi}^\pm = (\psi^\pm)^{-1}$ 分别给出了上述两个伴随方程的矩阵解. 当按如下形式表述 $\tilde{\psi}^\pm$:

$$\tilde{\psi}^\pm = (\tilde{\psi}^{\pm,1}, \tilde{\psi}^{\pm,2}, \dots, \tilde{\psi}^{\pm,n+1})^T,$$

即 $\tilde{\psi}^{\pm,j}$ 表示 $\tilde{\psi}^\pm$ ($1 \leq j \leq n+1$) 的第 j 行, 同样可以证明伴随矩阵解

$$P^- = (\tilde{\psi}^{-,1}, \tilde{\psi}^{-,2}, \dots, \tilde{\psi}^{-,n+1})^T = H_1 \tilde{\psi}^- + H_2 \tilde{\psi}^+ = H_1 (\psi^-)^{-1} + H_2 (\psi^+)^{-1} \quad (21)$$

在 $\lambda \in \mathbf{C}^-$ 解析, 其他的矩阵解

$$(\tilde{\psi}^{+,1}, \tilde{\psi}^{+,2}, \dots, \tilde{\psi}^{+,n+1})^T = H_1 \tilde{\psi}^+ + H_2 \tilde{\psi}^- = H_1 (\psi^+)^{-1} + H_2 (\psi^-)^{-1}$$

在 $\lambda \in \mathbf{C}^+$ 解析.

再次利用 Volterra 积分方程(18)–(19), 得到

$$P^-(x, \lambda) \rightarrow I_{n+1}, \quad \text{当 } \lambda \in \mathbf{C}^- \rightarrow \infty$$

和

$$(\tilde{\psi}^{+,1}, \tilde{\psi}^{+,2}, \dots, \tilde{\psi}^{+,n+1})^T \rightarrow I_{n+1}, \quad \text{当 } \lambda \in \mathbf{C}^+ \rightarrow \infty.$$

至此, 已经构造了两个矩阵函数 $P^+(x, \lambda)$ 和 $P^-(x, \lambda)$, 它们作为 λ 的函数分别在 $\mathbf{C}^+$ 和 $\mathbf{C}^-$ 解析. 现在, 引入

$$G^+(x, \lambda) = \lim_{\mu \in \mathbf{C}^+, \mu \rightarrow \lambda} P^+(x, \mu), \quad (G^-)^{-1}(x, \lambda) = \lim_{\mu \in \mathbf{C}^-, \mu \rightarrow \lambda} P^-(x, \mu), \lambda \in \mathbf{R},$$

可以直接证明在实轴上, 两个矩阵函数 G^+ 和 G^- 是彼此相关的:

$$G^+(x, \lambda) = G^-(x, \lambda)G(x, \lambda), \lambda \in \mathbf{R}, \quad (22)$$

其中, 由式(17), 可以计算跳跃矩阵 G 为

$$G(x, \lambda) = E(H_1 + H_2 S(\lambda))(H_1 + S^{-1}(\lambda)H_2)E^{-1} =$$

$$E \begin{bmatrix} 1 & \hat{s}_{12} & \hat{s}_{13} & \cdots & \hat{s}_{1,n+1} \\ s_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ s_{31} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n+1,1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} E^{-1}, \quad (23)$$

且 $S^{-1}(\lambda) = (S(\lambda))^{-1} = (\hat{s}_{jl})_{(n+1) \times (n+1)}$.

按照在第 2 部分中给出的一般建模过程, 两个方程(22)–(23) 精确地给出了为多分量非线性薛定谔方程(7)–(8) 建立的关联矩阵 Riemann-Hilbert 问题集. 对于上述给出 Riemann-Hilbert 问题的渐近性质

$$P^\pm(x, \lambda) \rightarrow I_{n+1}, \quad \text{当 } \lambda \in \mathbf{C}^\pm \rightarrow \infty,$$

及其规范化条件

$$G^\pm(x, \lambda) \rightarrow I_{n+1}, \quad \text{当 } \lambda \in \mathbf{R}, \lambda \rightarrow \pm \infty. \quad (24)$$

为了给出直接散射变换, 计算式(17)中关于时间 t 的导数, 并利用 $2n$ 位势在 t 的无穷处趋于零的条件. 通过直接计算, 可以验证散射矩阵 $\mathbf{S}$ 需要满足下列演化规则:

$$\mathbf{S}_t = i\lambda^2 [\mathbf{\Omega}, \mathbf{S}],$$

其中蕴含了时间依赖散射系数的时间演化由下式确定

$$s_{1,j} = s_{1,j}(0, \lambda) e^{i\beta\lambda^2 t}, \quad s_{j,1} = s_{j,1}(0, \lambda) e^{-i\beta\lambda^2 t}, \quad 2 \leq j \leq n+1,$$

其他的散射系数不依赖于时间变量 t 。

4 对孤立子解的应用

众所周知, 具有零点的 Riemann-Hilbert 问题产生孤子解并且可以通过转化成没有零点的问题进行求解^[2]。只要 $\det \mathbf{P}^\pm$ 在上半平面和下半平面的零点指定并且在这些零点处 $\ker \mathbf{P}^\pm$ 的结构可以确定, 对每一个由式(22)–(23)定义的关联 Riemann-Hilbert 问题, 解的唯一性成立^[23-24]。由于 $\det \mathbf{P}^\pm = 1$, 由式(20)–(21)中 $\mathbf{P}^\pm$ 的引入以及式(17)中 $\mathbf{P}^+$ 和 $\mathbf{P}^-$ 之间的散射关系推出

$$\det \mathbf{P}^+(x, \lambda) = s_{11}(\lambda), \quad \det \mathbf{P}^-(x, \lambda) = \hat{s}_{11}(\lambda),$$

这里, 由于 $\det \mathbf{S} = 1$, 函数 $\hat{s}_{11}$ 可以计算如下:

$$\hat{s}_{11} = (\mathbf{S}^{-1})_{11} = \begin{vmatrix} s_{22} & s_{23} & \cdots & s_{2,n+1} \\ s_{32} & s_{33} & \cdots & s_{3,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n+1,2} & s_{n+1,3} & \cdots & s_{n+1,n+1} \end{vmatrix}.$$

令 N 为另一个任意的自然数, 假设函数 s_{11} 有 N 个零点 $\{\lambda_k \in \mathbf{C}^+, 1 \leq k \leq N\}$, 函数 $\hat{s}_{11}$ 有 N 个零点 $\{\hat{\lambda}_k \in \mathbf{C}^-, 1 \leq k \leq N\}$ 。为了得到 N 个孤立子解, 假设所有这些零点 λ_k 和 $\hat{\lambda}_k$ 都是单零点。因此, 对每一个 $\ker \mathbf{P}^+(\lambda_k), 1 \leq k \leq N$, 只包含一个单基列向量, 用 $\mathbf{v}_k (1 \leq k \leq N)$ 表示; 对每一个 $\ker \mathbf{P}^-(\hat{\lambda}_k), 1 \leq k \leq N$, 只包含一个单基行向量, 用 $\hat{\mathbf{v}}_k (1 \leq k \leq N)$ 表示, 即

$$\mathbf{P}^+(\lambda_k) \mathbf{v}_k = 0, \quad \hat{\mathbf{v}}_k \mathbf{P}^-(\hat{\lambda}_k) = 0, \quad 1 \leq k \leq N. \quad (25)$$

式(24)中具有规范化条件的 Riemann-Hilbert 问题(22)–(23)以及式(25)中零点的结构可以明确地求解。

为了计算出 N 孤立子解, 在上述 Riemann-Hilbert 问题中, 取 $\mathbf{G} = \mathbf{I}_{n+1}$ 。当取 $s_{j,1} = \hat{s}_{1,j} = 0 (2 \leq j \leq n+1)$ 时, 这一点可以做到, 这意味着在散射问题中不存在反射。由此导出的 Riemann-Hilbert 问题有解^[2,25]。

$$\mathbf{P}^+(\lambda) = \mathbf{I}_{n+1} - \sum_{k,l=1}^N \frac{\mathbf{v}_k (\mathbf{M}^{-1})_{kl} \hat{\mathbf{v}}_l}{\lambda - \hat{\lambda}_l}, \quad \mathbf{P}^-(\lambda) = \mathbf{I}_{n+1} + \sum_{k,l=1}^N \frac{\mathbf{v}_k (\mathbf{M}^{-1})_{kl} \hat{\mathbf{v}}_l}{\lambda - \lambda_l}, \quad (26)$$

其中, $\mathbf{M}$ 是方阵, 并定义如下:

$$\mathbf{M} = (m_{kl})_{N \times N}, \quad m_{kl} = \frac{\hat{\mathbf{v}}_k \mathbf{v}_l}{\lambda_l - \hat{\lambda}_k}, \quad 1 \leq k, l \leq N. \quad (27)$$

由于零点 λ_k 和 $\hat{\lambda}_k (1 \leq k \leq N)$ 都是常数, 即它们都不依赖于空间变量和时间变量, 因此在核 $\ker \mathbf{P}^\pm$ 中, 可以很容易确定向量 $\mathbf{v}_k(x, t)$ 和 $\hat{\mathbf{v}}_k(x, t) (1 \leq k \leq N)$ 的时空演变。例如, 在式(25)中对第 1 组方程的两边计算关于 x 的导数。通过式(13)及式(25)中第 1 组方程, 可以得到

$$\mathbf{P}^+(x, \lambda_k) \left(\frac{d\mathbf{v}_k}{dx} - i\lambda_k \mathbf{A} \mathbf{v}_k \right) = 0, \quad 1 \leq k \leq N.$$

由此可以得出, 对每一个 $1 \leq k \leq N$, 向量 $\frac{d\mathbf{v}_k}{dx} - i\lambda_k \mathbf{A} \mathbf{v}_k$ 一定在 $\mathbf{P}^+(x, \lambda_k)$ 的核中, 因此也一定是向量 $\mathbf{v}_k$ 的常数倍。不失一般性, 考虑最简单的情形, 常数等于零, 因此有

$$\frac{d\mathbf{v}_k}{dx} = i\lambda_k \mathbf{A} \mathbf{v}_k, \quad 1 \leq k \leq N.$$

通过完全类似的方式, $\mathbf{v}_k$ 的时间依赖性

$$\frac{d\mathbf{v}_k}{dt} = i\lambda_k^2 \mathbf{\Omega} \mathbf{v}_k, \quad 1 \leq k \leq N$$

可以通过利用时间矩阵谱问题(14)来确定。总而言之, 得到

$$\mathbf{v}_k(x, t) = e^{i\hat{u}_k A x + i\hat{u}_k^2 \Omega t} \mathbf{v}_{k,0}, \quad \hat{\mathbf{v}}_k(x, t) = \hat{\mathbf{v}}_{k,0} e^{-i\hat{u}_k A x - i\hat{u}_k^2 \Omega t}, 1 \leq k \leq N, \quad (28)$$

其中 $\mathbf{v}_{k,0}$ 和 $\hat{\mathbf{v}}_{k,0}$ ($1 \leq k \leq N$) 分别是任意的常数列向量和常数行向量。

求解孤立子解的关键一步是由 $\mathbf{P}^+(x, \lambda)$ 计算位势矩阵 $\mathbf{P}$ 。注意到 $\mathbf{P}^+$ 是矩阵谱问题(13) 的一个解, 因此, 在充分大的 λ 处, 将 $\mathbf{P}^+$ 进行级数展开

$$\mathbf{P}^+(x, \lambda) = \mathbf{I}_{n+1} + \frac{1}{\lambda} \mathbf{P}_1^+(x) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \lambda \rightarrow \infty,$$

将这个级数展开式代入式(13), 并结合 $O(1)$ 项可以得到

$$\mathbf{P} = -i[\mathbf{A}, \mathbf{P}_1^+].$$

这意味着位势矩阵如下表示:

$$\mathbf{P} = -[\mathbf{A}, \mathbf{P}_1^+] = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha(\mathbf{P}_1^+)_{12} & -\alpha(\mathbf{P}_1^+)_{13} & \cdots & -\alpha(\mathbf{P}_1^+)_{1,n+1} \\ \alpha(\mathbf{P}_1^+)_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha(\mathbf{P}_1^+)_{31} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha(\mathbf{P}_1^+)_{n+1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

其中, $\mathbf{P}_1^+ = ((\mathbf{P}_1^+)_{jl})_{(n+1) \times (n+1)}$ 。即 $2n$ 个位势 p_j 和 q_j ($1 \leq j \leq n$) 可以计算如下:

$$p_j = -\alpha(\mathbf{P}_1^+)_{1,j+1}, q_j = \alpha(\mathbf{P}_1^+)_{j+1,1}, 1 \leq j \leq n. \quad (29)$$

最后, 从式(26) 中解的 λ 依赖性, 可以得出

$$\mathbf{P}_1^+ = -\sum_{k,l=1}^N \mathbf{v}_k (\mathbf{M}^{-1})_{kl} \hat{\mathbf{v}}_l.$$

因此, 进一步应用式(29) 中解的表达式, 可以得到多分量非线性薛定谔方程(7)–(8) 的 N 孤立子解:

$$p_j = \alpha \sum_{k,l=1}^N \mathbf{v}_{k,1} (\mathbf{M}^{-1})_{kl} \hat{\mathbf{v}}_{l,j+1}, \quad q_j = -\alpha \sum_{k,l=1}^N \mathbf{v}_{k,j+1} (\mathbf{M}^{-1})_{kl} \hat{\mathbf{v}}_{l,1}, 1 \leq j \leq n,$$

其中: 矩阵 $\mathbf{M}$ 由式(27) 定义; $\mathbf{v}_k = (v_{k,1}, v_{k,2}, \dots, v_{k,n+1})^T$ 和 $\hat{\mathbf{v}}_k = (\hat{v}_{k,1}, \hat{v}_{k,2}, \dots, \hat{v}_{k,n+1})$ ($1 \leq k \leq N$) 由式(28) 定义。这类孤子解也可以用矩阵行列式来表述。

5 结束语

本文主要目的是对实轴上的 Riemann-Hilbert 问题进行建模, 结合矩阵谱问题, 计算可结方程的孤立子解。其中一个重要步骤是引入一类等价矩阵谱问题, 保证上下半平面上有界解析特征函数的存在性。

把具有任意阶退化 AKNS 空间矩阵谱问题的多分量非线性薛定谔方程作为一个范例, 给出了它的 Riemann-Hilbert 问题, 并给出了 Riemann-Hilbert 问题跳跃矩阵的显式表达式。基于单位跳跃矩阵, 从相应的特殊 Riemann-Hilbert 问题出发, 得到了多分量非线性薛定谔方程的孤立子解。在求解孤立子解的过程中, Riemann-Hilbert 方法是非常有用的工具^[3-6,26], 近年来, 该方法已推广到处理半直线和有限区间上可积方程初始边值问题。孤立子理论中还有许多其他求解孤立子解的方法有着广泛应用, 这其中包括 Hirota 直接法^[30]、推广的双线性技术^[31-32]、Wronskian 技术^[33-34] 以及 Darboux 变换^[35-36]。研究这些不同方法之间的相互联系将是十分有趣的。

基于 Riemann-Hilbert 问题及称为 $\bar{\partial}$ 问题的广义 Riemann-Hilbert 问题^[1,42], 探索可积方程其他类型的精确解, 特别是整体解是很有意义的^[37-41]。另一方面, 通过对 Riemann-Hilbert 问题建模, 修正 KdV 方程的孤立子解可以得到同样的处理^[26]。关于耦合修正 KdV 方程, 还有许多其他研究, 这其中有可积耦合^[43-45]、超族^[46-47] 以及分数阶方程^[48]。进一步研究如何将 Riemann-Hilbert 问题建模用于求解广义可积对应问题, 这将有助于从 Riemann-Hilbert 技术的角度去认识广义可积方程的精确解理论。

参考文献

- [1] Ablowitz M J, Clarkson P A. Solitons; nonlinear evolution equations and inverse scattering[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

- [2] Novikov S P, Manakov S V, Pitaevskii L P, et al. Theory of solitons; the inverse scattering method[M]. Nauka, Moscow (1980). Consultants Bureau, New York, 1984.
- [3] Wang D S, Zhang D J, Yang J. Integrable properties of the general coupled nonlinear Schrodinger equations[J]. J. Math. Phys. ,2010,51(2):023510.
- [4] Xiao Y, Fan E G. A Riemann-Hilbert approach to the Harry-Dym equation on the line[J]. Chin. Ann. Math. Ser. B, 2006,37(3):373-384.
- [5] Geng X G, Wu J P. Riemann-Hilbert approach and N-soliton solutions for a generalized Sasa-Satsuma equation[J]. Wave Motion,2016,60:62-72.
- [6] Shepelsky D, Zielinski L. The inverse scattering transform in the form of a Riemann-Hilbert problem for the Dullin-Gottwald-Holm equation[J]. Opuscula Math. ,2017,37(1):167-187.
- [7] Deift P, Zhou X. A steepest descent method for oscillatory Riemann-Hilbert problems[J]. Asymptotics for the MKdV equation. Ann. Math. ,1993,137(2):295-368.
- [8] Deift P, Venakides S, Zhou X. An extension of the steepest descent method for Riemann-Hilbert problems; the small dispersion limit of the Korteweg-de Vries(KdV)equation[J]. Proc. Natl. Acad. Sci. USA,1998,95(2):450-454.
- [9] Lax P D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves[J]. Comm. Pure Appl. Math. ,1968,21(5):467-490.
- [10] Ablowitz M J, Kaup D J, Newell A C, et al. The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems [J]. Stud. Appl. Math. ,1974,53(4):249-315.
- [11] Ma W X, Zhou R G. Adjoint symmetry constraints of multicomponent AKNS equations[J]. Chin. Ann. Math. B,2002,23(3):373-384.
- [12] Manakov S V. On the theory of two-dimensional stationary self-focusing of electromagnetic waves[J]. Sov. Phys. JETP,1974,38(2):248-253.
- [13] Chen S T, Zhou R G. An integrable decomposition of the Manakov equation. Comput[J]. Appl. Math. ,2012,31(1):1-18.
- [14] Tu G Z. The trace identity, a powerful tool for constructing the Hamiltonian structure of integrable systems[J]. J. Math. Phys. ,1989,30(2):330-338.
- [15] Ma W X, Chen M. Hamiltonian and quasi-Hamiltonian structures associated with semi-direct sums of Lie algebras [J]. J. Phys. A: Math. Gen. ,2006,39(34):10787-10801.
- [16] Ma W X. Variational identities and applications to Hamiltonian structures of soliton equations. Nonlinear Anal[J]. Theor. Meth. Appl. ,2009,71(12):e1716-e1726.
- [17] Magri F. A simple model of the integrable Hamiltonian equation[J]. J. Math. Phys. ,1978,19(5):1156-1162.
- [18] Ma W X, Zhou R G. Adjoint symmetry constraints leading to binary nonlinearization[J]. J. Nonlinear Math. Phys. , 2002,9(S1):106-126.
- [19] Fuchssteiner B, Fokas A S. Symplectic structures, their Bäcklund transformations and hereditary symmetries[J]. Phys. D,1981,4(1):47-66.
- [20] Gerdjikov V S. Geometry, integrability and quantization// Proceedings of the 6th International Conference[C]. Softex, Sofia,2005,78-125.
- [21] Doktorov E V, Leble S B. A dressing method in mathematical physics[M]. Dordrecht; Springer,2007.
- [22] Ma W X, Yong X L, Qin Z Y, et al. A generalized Liouville's formula[J]. 2016, preprint.
- [23] Shchesnovich V S. Perturbation theory for nearly integrable multicomponent nonlinear PDEs[J]. J. Math. Phys. , 2002,43(3):1460-1486.
- [24] Shchesnovich V S, Yang J. General soliton matrices in the Riemann-Hilbert problem for integrable nonlinear equations [J]. J. Math. Phys. ,2003,44(10):4604-4639.
- [25] Kawata T. Riemann spectral method for the nonlinear evolution equation// Advances in Nonlinear Waves Vol. I, Res. Notes in Math. 95[C]. Boston,1984:201-225.
- [26] Ma W X. Riemann-Hilbert problems and N-soliton solutions for a coupled mKdV system[J]. 2017, preprint.
- [27] Fokas A S, Lenells J. The unified method; I. Nonlinearizable problems on the half-line[J]. J. Phys. A: Math. Theor. , 2012,45(19):195-201.

- [28] Lenells J, Fokas A S. The unified method; III. Nonlinearizable problems on the interval[J]. J. Phys. A: Math. Theor. , 2012, 45(19): 195-203.
- [29] Xu J, Fan E G. Long-time asymptotics for the Fokas-Lenells equation with decaying initial value problem; without solitons[J]. J. Diff. Equ. , 2015, 259(3): 1098-1148.
- [30] Hirota R. The direct method in soliton theory[M]. New York: Cambridge University Press, 2004.
- [31] Ma W X. Generalized bilinear differential equations[J]. Stud. Nonlinear Sci. , 2011, 2(4): 140-144.
- [32] Ma W X, Zhang Y, Tang Y N, et al. Hirota bilinear equations with linear subspaces of solutions[J]. Appl. Math. Comput. , 2012, 218(13): 7174-7183.
- [33] Freeman N C, Nimmo J J C. Soliton solutions of the Korteweg-de Vries and Kadomtsev-Petviashvili equations; the Wronskian technique[J]. Phys. Lett. A, 1983, 95(1): 1-3.
- [34] Ma W X, You Y. Solving the Korteweg-de Vries equation by its bilinear form; Wronskian solutions[J]. Trans. Amer. Math. Soc. , 2005, 357(5): 1753-1778.
- [35] Matveev V B, Salle M A. Darboux transformations and solitons[M]. Berlin: Springer, 1991.
- [36] Ma W X. Darboux transformations for a Lax integrable system in $2n$ -dimensions[J]. Lett. Math. Phys. , 1997, 39(1): 33-49.
- [37] Satsuma J, Ablowitz M J. Two-dimensional lumps in nonlinear dispersive systems[J]. J. Math. Phys. , 1979, 20(7): 1496-1503.
- [38] Ma W X. Lump solutions to the Kadomtsev-Petviashvili equation[J]. Phys. Lett. A, 2015, 379(36): 1975-1978.
- [39] Ma W X, Zhou Y, Dougherty R. Lump-type solutions to nonlinear differential equations derived from generalized bilinear equations[J]. Int. J. Modern Phys. B, 2016, 30(28-29): 1640018.
- [40] Yang J Y, Ma W X. Lump solutions to the BKP equation by symbolic computation[J]. Int. J. Modern Phys. B, 2016, 30(28-29): 1640028.
- [41] Zhang Y, Dong H H, Zhang X E, et al. Rational solutions and lump solutions to the generalized $(3+1)$ -dimensional shallow water-like equation[J]. Comput. Math. Appl. , 2017, 73(2): 246-252.
- [42] Ablowitz M J, Fokas A S. Complex variables; Introduction and applications[M]. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- [43] Xu X X. An integrable coupling hierarchy of the MKdV integrable systems, its Hamiltonian structure and corresponding nonisospectral integrable hierarchy[J]. Appl. Math. Comput. , 2010, 216(1): 344-353.
- [44] Zhao Q L, Wang X Z. The integrable coupling system of a 3×3 discrete matrix spectral problem[J]. Appl. Math. Comput. , 2010, 216(3): 730-743.
- [45] Wang X R, Zhang X E, Zhao P Y. Binary nonlinearization for AKNS-KN coupling system[J]. Abstr. Appl. Anal. , 2014, Article ID 253102.
- [46] Ma W X, He W X, Qin J S, et al. A supertrace identity and its applications to superintegrable systems[J]. J. Math. Phys. , 2008, 49(3): 033511.
- [47] Dong H H, Zhao H H, Yang K, et al. Generalised $(2+1)$ -dimensional super MKdV hierarchy for integrable systems in soliton theory[J]. East Asian J. Appl. Math. , 2015, 5(3): 256-272.
- [48] Dong H H, Guo B Y, Yin B S. Generalized fractional supertrace identity for Hamiltonian structure of NLS-MKdV hierarchy with self-consistent sources[J]. Anal. Math. Phys. , 2016, 6(2): 199-209.

Modeling Riemann-Hilbert Problems to Get Soliton Solutions

MA Wenxiu¹, DONG Huanhe²

(1. Department of Mathematics and Statistics, University of South Florida, Tampa, Florida 33620-5700, USA;

2. College of Mathematics and Systems Science, Shandong University of
Science and Technology, Qingdao, Shandong 266590, China)

Abstract: The paper aims to develop a practical procedure to model a kind of Riemann-Hilbert problems on the real axis for integrable equations based on their matrix spectral problems. Soliton solutions are explicitly computed through special

Riemann-Hilbert problems where a jump matrix is taken to be the identity matrix. As an illustrative example, an application of the resulting procedure is made for a system of multicomponent nonlinear Schrödinger equations associated with an arbitrary order matrix spectral problem.

Key words: matrix spectral problem; Riemann-Hilbert problem; soliton solution

作者简介

马文秀(1962—),男,博士,教授,主要研究方向为孤立子理论与可积系统。

董焕河(1970—),男,博士,教授,主要研究方向为孤立子理论与可积系统。

(上接第 15 页)

A Survey on Multi-view Learning

TANG Jingjing^{1,2}, TIAN Yingjie^{2,3,4}

(1. School of Mathematical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;

2. Research Center on Fictitious Economy and Data Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;

3. Key Laboratory of Big Data Mining and Knowledge Management, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;

4. School of Economics and Management, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

Abstract: With the rapid development of computer technology, data collection and storage ability have been greatly improved. In the areas of scientific research and social life, huge amounts of complex data appear. The data obtained from multiple sources or different feature subsets are called multi-view data. Multi-view learning is a machine learning method that applies the knowledge from multiple views for modeling. Existing multi-view learning models mainly follow two principles: 1) the consensus principle; 2) the complementarity principle. In recent years, multi-view learning has provoked vast amount of attention and research. This paper surveys the research progress of multi-view learning and introduces its own works and the applications. Furthermore, it points out the challenges and suggests the future research direction of multi-view learning.

Key words: multi-view learning; consensus principle; complementarity principle

作者简介

唐静静(1990—),女,博士研究生,研究方向是最优化与数据挖掘,机器学习。

田英杰(1973—),男,博士,研究员,主要从事最优化理论与方法、机器学习、数据挖掘、智能知识理论以及风险管理的教学与研究。