DOI:10.16183/j.cnki.jsjtu.1989.01.002

上 海 交 通 大 学 学 报

第23卷 第1期 JOURNAL OF SHANGHAI JIAOTONG UNIVERSITY Vol.23 №1 1989

一族具有三Hamilton结构的发展方程及其对称*

马文秀

（应用数学系）

摘 要 本文构造了三个可逆Hamilton算子，它们两两组成一个Hamilton对，由此生成了一族三Hamilton结构的具有对合守恒密度族的可积系，并得到了这族发展方程的对称族。

关键词 Hamilton算子，遗传对称，对称，Poisson括弧，Hamilton系统。

0 引 言

在Soliton理论研究中，拓广可积方程族是其一个主要的课题，文献中大都是从线性特征值问题，即从

$$\begin{cases} \varphi_x = U\varphi \\ \varphi_t = V\varphi \end{cases}$$

的零曲率方程

$$U_t - V_x + [U, V] = 0$$

出发，得到一族Soliton方程[1,2]，并有许多方法[2-4]可以证明这种方程族具有广义Hamilton结构。双Hamilton理论[5]的建立为构造可积系给出了另一个重要的方向，即先直接构造出一个Hamilton对J_1，J_2，其中一个可逆（不妨设J_1可逆），此时$L=J_1^{-1}J_2$是一个遗传对称，如果J，L^+（L的共轭算子）再满足一定的条件，且存在初始梯度向量$f_0(u)$使$Lf_0(u)$仍是梯度向量，则可得到一族可积系$u_t=J_2L^nf_0(u)$ $(n\geqslant 0)$。

本文找出了三个可逆Hamilton算子，它们两两构成Hamilton对，从而得到一族具有三Hamilton结构的发展方程。设位势r，q关于空间变量x是速降函数，且令

$$I = D^{-1} = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{x} - \int_{x}^{+\infty}\right)dx', \quad D = \frac{d}{dx}$$

本文1988年1月22日收到。

* 上海交通大学青年科研基金A1190资助课题。

1 Hamilton 算子与方程族

为了从 Hamilton 对构造遗传对称，需要下列两条不证自明的引理：

引理 1 设 f，g 是两个 x 的函数，则

$$(fD+g)^{-1}=PIQ$$

其中
$$P=\exp\left(-I\frac{g}{f}\right),\quad Q=\frac{1}{f}\exp\left(I\frac{g}{f}\right)$$

引理 2 设 f_1，f_2，…，f_N 是 x 的函数，则

$$\begin{bmatrix} -f_N & -f_{N-1} & \cdots & -f_1 & D \\ -f_{N-1} & & & & \\ \cdots & & & & \\ -f_1 & & & & \\ D & & & & 0 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & & & & I \\ & & & & P_1 \\ & & & & \vdots \\ & & & & P_{N-1} \\ I & P_1 & \cdots & P_{N-1} & P_N \end{bmatrix}$$

其中
$$P_1=If_1I,\quad P_i=If_iI+I(f_{i-1}P_1+f_{i-2}P_2+\cdots+f_1P_{i-1})\qquad 2\leqslant i\leqslant N$$

令

$$H=\begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{2}q_x+qD\right)+D & D \\ D & 0 \end{bmatrix}\tag{1}$$

$$J=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}r_x+rD & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}\tag{2}$$

$$K=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}r_x+rD \\ \frac{1}{2}r_x+rD & \frac{1}{2}q_x+qD-D \end{bmatrix}\tag{3}$$

任取实数 a，b，c，考虑 $aH+bJ+cK$。令

$$u=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix}$$

则

$$aH+bJ+cK=\begin{bmatrix} -a\left(\frac{1}{2}q_x+qD\right)+aD+b\left(\frac{1}{2}r_x+rD\right) & aD+c\left(\frac{1}{2}r_x+rD\right) \\ aD+c\left(\frac{1}{2}r_x+rD\right) & bD+c\left(\frac{1}{2}q_x+qD\right)-cD \end{bmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -a\left(\frac{1}{2}q_x+qD\right)+b\left(\frac{1}{2}r_x+rD\right) & c\left(\frac{1}{2}r_x+rD\right) \\ c\left(\frac{1}{2}r_x+rD\right) & c\left(\frac{1}{2}q_x+qD\right) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} aD & aD \\ aD & (b-c)D \end{pmatrix}$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{2} c_{ij}^{k}\left(\frac{1}{2}u_k^{(1)}+u_kD\right)\right)_{2\times 2}+\left(\sum_{m\geqslant 0} b_{ijm}D^m\right)_{2\times 2}$$

其中 $$(c_{ij}^1)_{2\times 2}=\begin{pmatrix} b & c \\ c & 0 \end{pmatrix},\ (c_{ij}^2)=\begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$(b_{ij1})_{2\times 2}=\begin{pmatrix} a & a \\ a & b-c \end{pmatrix},\ (b_{ijm})_{2\times 2}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\quad m\neq 1\quad m\geqslant 0$$

由文献[7]中的结论2与推论2不难证明，$aH+bJ+cK$ 是Hamilton算子，故得：

定理 1 设 H，J，K 分别由式(1～3)确定，则 $aH+bJ+cK$ ($\forall a, b, c\in R$) 是Hamilton算子，从而 H，J，K 两两构成Hamilton对。

由引理1，2知，H，J，K 都是可逆算子，并由引理2可得：

$$H^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & \frac{1}{2}Iq_xI+Iq-I \end{pmatrix}$$

令

$$L=H^{-1}J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ r-\frac{1}{2}I_x & q-\frac{1}{2}Iq_x-1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

则

$$N=L^{+}=\begin{pmatrix} 0 & r+\frac{1}{2}r_xI \\ 1 & q+\frac{1}{2}q_xI-1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

是遗传对称[7,8]（或Nijenhuis算子[9]），且

$$HL=J,\ JL=K \tag{6}$$

由引理1易得：

$$J^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{r}}I\frac{1}{\sqrt{r}} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

于是

$$L^{-1}=J^{-1}H=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{r}}I\frac{q_x}{\sqrt{r}}-\frac{1}{\sqrt{r}}I\frac{q}{\sqrt{r}}D+\frac{1}{\sqrt{r}}I\frac{1}{\sqrt{r}}D & \frac{1}{\sqrt{r}}I\frac{1}{\sqrt{r}}D \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

取 $$f_0(u)=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{\delta H_0}{\delta u},\ H_0=q$$

则
$$L_0(u)=\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}q-1\end{pmatrix}=\frac{\delta H_1}{\delta u},\quad H_1=r+\frac{1}{4}q^2-q$$

于是由 Magri 第一定理[9]知：$L^n f_0(u)$都是梯度向量，故存在$H_n=H_n(u)$，使
$$\frac{\delta H_n}{\delta u}=L^n f_0(u)\quad n\geqslant 0 \tag{8}$$

于是方程族
$$u_t=JL^n f_0(u)\quad n\geqslant 1 \tag{9}$$

是一族广义 Hamilton 系统族。

2　算子 J 与 N 的耦合条件

1）第一耦合条件

因 $JL=K$ 是 Hamilton 算子，自然是斜对称，故
$$JL=-(JL)^+=-L^+J^+=L^+J$$

从而
$$NJ=JN^+$$

2）第二耦合条件

设
$$\alpha=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix},\quad \varphi=\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}$$

易知
$$J\alpha=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}r_x\alpha_1+r\alpha_{1x}\\ \alpha_{2x}\end{pmatrix},\quad J\beta=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}r_x\beta_1+r\beta_{1x}\\ \beta_{2x}\end{pmatrix}$$

下面来验证第二耦合条件：
$$\langle\alpha,\ N'[\varphi]J\beta\rangle-\langle\alpha,\ N'[J\beta]\varphi\rangle+\langle\beta,\ N'[J\alpha]\varphi\rangle$$
$$+\langle\beta,\ NJ'[\varphi]\alpha\rangle-\langle\beta,\ J'[N\varphi]\alpha\rangle=0$$

依次计算左边各项：
$$N'[\varphi]J\beta=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}N(u+\varepsilon\varphi)J\beta$$
$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\begin{pmatrix}0 & r+\varepsilon\varphi_1+\frac{1}{2}(r+\varepsilon\varphi_1)_x I\\ 1 & q+\varepsilon\varphi_2+\frac{1}{2}(q+\varepsilon\varphi_2)_x I-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}r_x\beta_1+r\beta_{1x}\\ \beta_{2x}\end{pmatrix}$$
$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\begin{pmatrix}(r+\varepsilon\varphi_1)\beta_{2x}+\frac{1}{2}(r+\varepsilon\varphi_1)_x\beta_2\\ \frac{1}{2}\beta_1 r_x+r\beta_{1x}+(q+\varepsilon\varphi_2)\beta_{2x}+\frac{1}{2}(q+\varepsilon\varphi_2)_x\beta_2-\beta_{2x}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\varphi_1\beta_{2x}+\frac{1}{2}\varphi_{1x}\beta_2\\ \varphi_2\beta_{2x}+\frac{1}{2}\varphi_{2x}\beta_2\end{bmatrix}$$

故

$$\langle\alpha,\ N'[\varphi]J\beta\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\left(\alpha_1\beta_{2x}\varphi_1+\frac{1}{2}\alpha_1\beta_2\varphi_{1x}+\alpha_2\beta_{2x}\varphi_2+\frac{1}{2}\alpha_2\beta_2\varphi_{2x}\right)\tag{10}$$

同理

$$N'[J\beta]\varphi=\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{2}\beta_1r_x+r\beta_{1x}\right)\varphi_2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\beta_1r_x+r\beta_{1x}\right)_xI\varphi_2\\ \beta_{2x}\varphi_2+\frac{1}{2}\beta_{2xx}I\varphi_2\end{bmatrix}$$

$$\langle\alpha,\ N'[J\beta]\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\left[\alpha_1\left(\frac{1}{2}\beta_1r_x+r\beta_{1x}\right)\varphi_2+\frac{1}{2}\alpha_1\left(\frac{1}{2}\beta_1r_x+r\beta_{1x}\right)_xI\varphi_2\right.$$
$$\left.+\alpha_2\beta_{2x}\varphi_2+\frac{1}{2}\alpha_2\beta_{2xx}I\varphi_2\right]\tag{11}$$

上式交换α和β得：

$$\langle\beta,\ N'[J\alpha]\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\left[\left(\frac{1}{2}\alpha_1r_x+r\alpha_{1x}\right)\beta_1\varphi_2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\alpha_1r_x+r\alpha_{1x}\right)_x\beta_1I\varphi_2\right.$$
$$\left.+\alpha_{2x}\beta_2\varphi_2+\frac{1}{2}\alpha_{2xx}\beta_2I\varphi_2\right]\tag{12}$$

$$J'[\varphi]\alpha=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\alpha_1\varphi_{1x}+\alpha_{1x}\varphi_1\\ 0\end{bmatrix},\quad NJ'[\varphi]\alpha=\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{2}\alpha_1\varphi_{1x}+\alpha_{1x}\varphi_1\end{bmatrix}$$

$$\langle\beta,\ NJ'[\varphi]\alpha\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\left(\frac{1}{2}\alpha_1\beta_2\varphi_{1x}+\alpha_{1x}\beta_2\varphi_1\right)\tag{13}$$

$$J'[N\varphi]\alpha=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\alpha_1\left(r\varphi_2+\frac{1}{2}r_xI\varphi_2\right)_x+\alpha_{1x}\left(r\varphi_2+\frac{1}{2}r_xI\varphi_2\right)\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\langle\beta,J'[N\varphi]\alpha\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\left[\frac{1}{2}\alpha_1\beta_1\left(r\varphi_2+\frac{1}{2}r_xI\varphi_2\right)_x+\alpha_{1x}\beta_1\left(r\varphi_2+\frac{1}{2}r_xI\varphi_2\right)\right]\tag{14}$$

于是由式(10～14)得：

$$\langle\alpha,\ N'[\varphi]J\beta\rangle-\langle\alpha,\ N'[J\beta]\varphi\rangle+\langle\beta,\ N'[J\alpha]\varphi\rangle$$
$$+\langle\beta,\ NJ'[\varphi]\alpha\rangle-\langle\beta,\ J'[N\varphi]\alpha\rangle$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\left[\alpha_1\beta_{2x}\varphi_1+\frac{1}{2}\alpha_2\beta_2\varphi_{1x}+\alpha_2\beta_{2x}\varphi_2+\frac{1}{2}\alpha_2\beta_2\varphi_{2x}\right.$$

$$-\alpha_1\left(\frac{1}{2}\beta_1r_x+r\beta_{1x}\right)\varphi_2-\frac{1}{2}\alpha_1\left(\frac{1}{2}\beta_1r_x+r\beta_{1x}\right)_xI\varphi_2-\alpha_2\beta_{2x}\varphi_2$$

$$-\frac{1}{2}\alpha_2\beta_{2xx}I\varphi_2+\left(\frac{1}{2}\alpha_1r_x+\alpha_{1x}r\right)\beta_1\varphi_2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\alpha_1r_x+r\alpha_{1x}\right)_x\beta_1I\varphi_2$$

$$+\alpha_{2x}\beta_2\varphi_2+\frac{1}{2}\alpha_{2xx}\beta_2I\varphi_2+\frac{1}{2}\alpha_1\beta_2\varphi_{1x}+\alpha_{1x}\beta_2\varphi_1$$

$$-\frac{1}{2}\alpha_1\beta_1\left(r\varphi_2+\frac{1}{2}r_xI\varphi_2\right)_x-\alpha_{1x}\beta_1\left(r\varphi_2+\frac{1}{2}r_xI\varphi_2\right)\Big]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\left\{(\alpha_1\beta_{2x}\varphi_1+\alpha_1\beta_2\varphi_{1x}+\alpha_{1x}\beta_2\varphi_1)\right.$$

$$+\left(\frac{1}{2}\alpha_2\beta_2\varphi_{2x}-\frac{1}{2}\alpha_2\beta_{2xx}I\varphi_2+\alpha_{2x}\beta_2\varphi_2+\frac{1}{2}\alpha_{2xx}\beta_2I\varphi_2\right.$$

$$+\left[-\alpha_1\beta_{1x}r\varphi_2-\frac{1}{2}\alpha_1\left(\frac{1}{2}\beta_1r_x+r\beta_{1x}\right)_xI\varphi_2\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\alpha_1r_x+r\alpha_{1x}\right)_x\beta_1I\varphi_2-\frac{1}{2}\alpha_1\beta_1\left(r\varphi_2+\frac{1}{2}r_xI\varphi_2\right)_x$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2}\alpha_{1x}\beta_1r_xI\varphi_2\right]\right\}\tag{15}$$

上式右第一项

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\alpha_1\beta_2\varphi_1)_x\mathrm{d}x=0$$

第二项

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\left(\frac{1}{2}\alpha_2\beta_2\varphi_{2x}+\frac{1}{2}\alpha_{2x}\beta_{2x}I\varphi_2+\frac{1}{2}\alpha_2\beta_{2x}\varphi_2\right.$$

$$\left.+\alpha_{2x}\beta_2\varphi_2-\frac{1}{2}\alpha_{2x}\beta_{2x}I\varphi_2-\frac{1}{2}\alpha_{2x}\beta_2\varphi_2\right)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\left(\frac{1}{2}\alpha_2\beta_2\varphi_{2x}+\frac{1}{2}\alpha_2\beta_{2x}\varphi_2+\frac{1}{2}\alpha_{2x}\beta_2\varphi_2\right)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\alpha_2\beta_2\varphi_2\right)_x\mathrm{d}x=0$$

第三项

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\left[-\alpha_1\beta_{1x}r\varphi_2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\beta_1r_x+r\beta_{1x}\right)(\alpha_{1x}I\varphi_2+\alpha_1\varphi_2)\right.$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\alpha_1r_x+r\alpha_{1x}\right)(\beta_{1x}I\varphi_2+\beta_1\varphi_2)$$

$$\left.+\frac{1}{2}(\alpha_{1x}\beta_1+\alpha_1\beta_{1x})\left(r\varphi_2+\frac{1}{2}r_xI\varphi_2\right)-\frac{1}{2}\alpha_{1x}\beta_1r_xI\varphi_2\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\left\{\left[-\alpha_1\beta_{1x}r+\frac{1}{2}\alpha_1\left(\frac{1}{2}\beta_1r_x+r\beta_{1x}\right)\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\alpha_1r_x+r\alpha_{1x}\right)\beta_1+\frac{1}{2}(\alpha_{1x}\beta_1+\alpha_1\beta_{1x})r\right]\varphi_2$$

$$+\left[\frac{1}{2}\alpha_{1x}\left(\frac{1}{2}\beta_1 r_x+r\beta_{1x}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\alpha_1 r_x+r\alpha_{1x}\right)\beta_{1x}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}(\alpha_{1x}\beta_1+\alpha_1\beta_{1x})r_x-\frac{1}{2}\alpha_{1x}\beta_1 r_x\right]I\varphi_2\Big\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(0\cdot\varphi_2+0\cdot I\varphi_2)\mathrm{d}x=0$$

由此及式(15)证得了第二耦合条件。

综合1)和2)可推出：

定理 2 由式(2)和式(5)确定的Hamilton算子 J 和遗传对称 N 满足第一和第二耦合条件，即

$$NJ=JN^+ \tag{16}$$

$$\langle\alpha,\ N'[\varphi]J\beta\rangle-\langle\alpha,\ N'[J\beta]\varphi\rangle+\langle\beta,\ N'[J\alpha]\varphi\rangle+\langle\beta,\ NJ'[\varphi]\alpha\rangle$$
$$-\langle\beta,\ J'[N\varphi]\alpha\rangle=0 \tag{17}$$

式中 α，β，φ 是任意的三个函数向量。

3 式(9)方程族的无穷多守恒律及对称

1）式(9)方程族的守恒律

由于 J 和 N 满足第一耦合条件式(16)，故

$$\{H_i,\ H_j\}_J=\left\langle\frac{\delta H_i}{\delta u},\ J\frac{\delta H_j}{\delta u}\right\rangle=\langle L^i f_0(u),\ JL^j f_0(u)\rangle$$

$$=\langle L^i f_0(u),\ L^+JL^{j-1}f_0(u)\rangle=\langle L^{i+1}f_0(u),\ JL^{j-1}f_0(u)\rangle$$

$$=\left\langle\frac{\delta H_{i+1}}{\delta u},\ J\frac{\delta H_{j-1}}{\delta u}\right\rangle=\{H_{i+1},\ H_{j-1}\}_J\cdot$$

由此可得 $\{H_i,\ H_j\}_J=\{H_j,\ H_i\}_J$

又Poisson括弧 $\{\cdot,\ \cdot\}_J$ 是反对称，得 $\{H_i,\ H_j\}_J=-\{H_j,\ H_i\}_J$，因此 $\{H_i, H_j\}=0$。于是有：

定理 3 由式(8)确定的 $\{H_i\}_{i=0}^{\infty}$ 是式(9)方程族的一族公共的关于Poisson括弧 $\{\cdot,\ \cdot\}_J$ 对合的守恒密度。

2）式(9)方程族的对称

易知 $u_t=JLf_0(u)$，即为：

$$\begin{cases}r_t=\dfrac{1}{2}r_x\\[2ex] q_t=\dfrac{1}{2}q_x\end{cases}$$

由 J 和 N 满足两个耦合条件，故由Magri第二定理[9]知：N 是式(9)方程族中任一方程的强对称，又 N 可逆，故 N^{-1} 也是遗传对称和式(9)方程族的公共强对称[10]，于是方程 $u_t=JL^nf_0(u)$。有对称族 $\{N^mJL^nf_0(u)\}_{m\in z}$，即 $\left\{N^m\left(\frac{1}{2}u_x\right)\right\}_{m\in z}$，容易算得：

$$N^{-1}u_x=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \tag{18}$$

故

$$\left\{N^m\left(\frac{1}{2}u_x\right)\right\}_{m\in z}=\left\{N^m\left(\frac{1}{2}u_x\right)\right\}_{m=0}^{\infty}$$

又

$$\left[N^i\left(\frac{1}{2}u_x\right),\ N^j\left(\frac{1}{2}u_x\right)\right]=\left[J\frac{\delta H_{i+1}}{\delta u},\ J\frac{\delta H_{j+1}}{\delta u}\right]$$

$$=J\frac{\delta}{\delta u}\{H_{i+1},\ H_{j+1}\}_J=0 \qquad 0\leqslant i,\ j<+\infty$$

于是得到：

定理 4 式(9)方程族具有一族公共对称 $\left\{N^m\left(\frac{1}{2}u_x\right)\right\}_{m=0}^{\infty}$，且

$$\left[N^i\left(\frac{1}{2}u_x\right),\ N^j\left(\frac{1}{2}u_x\right)\right]=0,\ 0\leqslant i,\ j<+\infty$$

4 三Hamilton结构与拟线性性

因为 $u_t=HL^{n+1}f_0(u)=JL^nf_0(u)=KL^{n-1}f_0(u)$ $n\geqslant1$，又 H 和 J 及 K 两两构成 Hamilton 对，故式(9)方程族具有三 Hamilton 结构．于是有：

定理 5 式(9)方程族具有三 Hamilton 结构，即

$$u_t=H\frac{\delta H_{n+1}}{\delta u}=J\frac{\delta H_n}{\delta u}=K\frac{\delta H_{n-1}}{\delta u} \quad n\geqslant1$$

从而其守恒密度族 $\{H_i\}_{i=0}^{\infty}$ 关于 H 和 K 确定的 Poisson 括弧对合，即

$$\{H_i,\ H_j\}_H=\{H_i,\ H_j\}=0 \quad 0\leqslant i,\ j<+\infty$$

容易算得：

$$Lf_0(u)=\begin{bmatrix}1\\ \frac{1}{2}q-1\end{bmatrix}$$

$$L^2f_0(u)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}q-1\\ \frac{1}{2}r+\frac{3}{8}q^2-q+1\end{bmatrix}$$

$$L^3f_0(u)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}r+\frac{3}{8}q^2-q+1\\ \frac{3}{4}rq-r+\frac{5}{16}q^3-\frac{9}{8}q^2+\frac{3}{2}q-1\end{bmatrix}$$

$$L^4 f_0(u)=\begin{bmatrix}\frac{3}{4}rq-r+\frac{5}{16}q^3-\frac{9}{8}q^2+\frac{3}{2}q-1\\ \frac{3}{8}r^2+\frac{15}{16}rq^2-\frac{q}{4}rq+\frac{3}{2}r+\frac{35}{128}q^4-\frac{5}{4}q^3-\frac{9}{4}q^2-2q+1\end{bmatrix}$$

由此按变分反问题计算公式[11]得：

$$H_1=r+\frac{1}{4}q^2-q$$

$$H_2=\frac{1}{2}rq-r+\frac{1}{8}q^3-\frac{1}{2}q^2+q$$

$$H_3=\frac{1}{4}r^2+\frac{3}{8}rq^2-rq+r+\frac{5}{64}q^4-\frac{3}{8}q^3+\frac{3}{4}q^2-q$$

$$H_4=\frac{3}{8}r^2q-\frac{1}{2}r^2-r+\frac{5}{16}rq^3-\frac{9}{8}rq^2+\frac{3}{2}rq+\frac{7}{128}q^5-\frac{5}{16}q^4+\frac{3}{4}q^3-q^2+q$$

注意守恒密度 H_1，H_2，H_3，H_4 都是 r 和 q 的多项式，又

$$J=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}r_x+rD & 0\\ 0 & D\end{bmatrix}$$

从而易知：式（9）方程族中第一个方程组是一个特殊的线性方程组，但第二、三、四方程组则都是一阶拟线性方程组。我们猜想式(9)方程族的守恒密度 $H_i(i\geqslant 0)$都是位势 r 和 q 的二元多项式，而式(9)方程族除 $n=1$ 外，其余方程组都是一阶的拟线性方程组。

容易算出前三个方程组为：

$$\begin{cases}r_t=\frac{1}{2}r_x\\ q_t=\frac{1}{2}q_x\end{cases}\quad (n=1) \tag{19}$$

$$\begin{cases}r_t=\frac{1}{4}r_xq+\frac{1}{2}rq_x-\frac{1}{2}r_x\\ q_x=\frac{1}{2}r_x+\frac{3}{4}qq_x-q_x\end{cases}\quad (n=2) \tag{20}$$

$$\begin{cases}r_t=\frac{3}{4}rr_x+\frac{3}{16}r_xq^2-\frac{1}{2}r_xq+\frac{1}{2}r_x+\frac{3}{4}rqq_x-rq_x\\ q_t=\frac{3}{4}r_xq+\frac{3}{4}rq_x-r_x+\frac{15}{16}q^2q_x-\frac{9}{4}qq_x+\frac{2}{3}q_x\end{cases}\quad (n=3) \tag{21}$$

关于式(20)和式(21)方程组有没有孤子解需要作进一步的探讨。

另外，因L可逆，故可生成具有 Hamilton 结构的逆族，即

$$u_t = JL^{-n}f_0(u) \quad n\geqslant 1 \tag{22}$$

但此方程族很特殊，即有：

$$L^{-1}f_0(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{23}$$

故逆族都为零方程组。

定理5说明：式(9)方程族不仅只是双 Hamilton 系统族，而且还是三 Hamilton 系统族，从而可以断定式(9)方程族还具有其他一般孤子方程所具有的共性。

致 谢 屠规彰教授和向隆万副教授对本文的研究工作曾给予帮助和指点，作者还与胡星标同学作过有益的讨论，在此一并表示感谢。

参 考 文 献

[1] Newell A C. Solitons in Mathematics and Physics. Philadelphia: SIAM, 1985

[2] Tu G Z. Il Nuovo Cimento, 1983; 73B(1): 15

[3] Tu G Z. Science Exploration, 1982; 2(4): 85

[4] Alberty J M, Koikawa T & Sasaki R. Physica D, 1982; 5: 43

[5] Magri F. J Math Phys, 1977; 18: 1405. 1978; 19: 1156

[6] Ma Wenxiu. Journal of the Graduate School, USTC & Academia Sinica, 1986; 3(2): 37

[7] Fuchssteiner B. Nonlinear Analysis TMA, 1979; 3(6): 849

[8] Fuchssteiner B, Fokas A S. Physica D, 1981; 4: 47

[9] Magri F. In: Boiti M, Pempinell F and Soliani G ed. In Lecture Notes in Physics(120). Berlin: springer, 1980

[10] Zhu Guocheng. Kexue Tongbao, 1986; 31(15): 1018

[11] Tu G Z. J Math Anal Appl, 1983; 94(2): 348

A Hierarchy of Evolution Equations with Three-Hamiltonian Structures and Its Symmetries

Ma Wenxiu

Abstract This paper introduces three Hamiltonian operators, which form a Hamiltonian pair with one another, and herefrom a hierarchy integrable systems with three Hamiltonian structures and conserved quantities in evolution is found. A series of symmetries of this hierarchy evolution equation has also been obtained.

Key words Hamiltonian operator, hereditary symmetry, symmetry, Poisson bracket, Hamiltonian system.