DOI:10.16183/j.cnki.jsjtu.1987.05.012

上 海 交 通 大 学 学 报

第 21 卷 第 5 期 JOURNAL OF SHANGHAI JIAOTONG UNIVERSITY Vol. 21 №5 1987

若干$\overline{U}$-非线性Hamilton算子的等价条件*

马 文 秀

（应用数学系）

摘 要

在非线性演化方程的广义Hamiltom结构之研究中，对Hamilton算子的研究是其重要的一个方面。本文构造了若干种关于未知函数向量非线性的矩阵微分算子，基于Gel′fand的代数理论，研究了这些算子的Hamilton性，并得到了它们为Hamilton算子的关于其系数的代数条件，继而从所得的关系式出发，讨论了各种特殊情形，且举例说明了上述非平凡关于未知函数向量非线性的Hamilton算子的存在性。

关键词：矩阵微分算子，李代数，Hamilton算子，$\overline{u}$-非线性算子，系数条件。

一、前 言

在文献[1]中，Гельфанд 和 Дорфман 从一般李代数U和左U模(U,M)出发，详细刻画了与Hamilton(Symplectic)算子相关的代数结构，特别是与无限维情形下的Hamilton算子相关的形式变分学[2]中的辛结构，在形式变分学中的辛结构之研究中，他们讨论了矩阵微分算子H：$\Omega^1\to\overline{A}$，即

$$(H\xi)_\alpha=\sum_\beta H_{\alpha\beta}\xi_\beta \quad \xi\in\Omega^1,\ \alpha\in I \tag{1}$$

其中$H_{\alpha\beta}$是微分算子，即

$$H_{\alpha\beta}=\sum_{i=0}^{n(\alpha,\beta)} a_{\alpha\beta i}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^i \quad a_{\alpha\beta i}\in A \tag{2}$$

以上I是任意的指标集，A是复数域C上记号$\{u_\alpha^{(i)}|\alpha\in I,\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$的多元多项式代数，$\overline{A}=\{\overline{f}\mid\overline{f}$是向量场$\{f_\alpha\}$，$f_\alpha\in A$，$\alpha\in I\}$，$\Omega^1$是只有有限个分量不为零的向量场$\overline{\xi}=\{\xi_\alpha\}$。按定义

本文1986年5月10日收到。

*上海交通大学青年科研基金资助课题。

$$\xi(\overline{h})=\int(\sum_{\alpha}\xi_{\alpha}h_{\alpha})\,\mathrm{d}x \qquad \overline{h}\in\overline{A}$$

所确定的1-形式ξ之全体（它包含了所有泛函的微分[1]）。

定义　如果$a_{\alpha\beta i}$（α、$\beta\in I$ $0\leqslant i\leqslant n(\alpha,\beta)$）关于$\overline{u}=\{u_{\alpha}\}$都是线性的，则称$H$是$\overline{u}$-线性算子；否则称为$\overline{u}$-非线性算子。

文献[1]对几种特殊的$\overline{u}$-线性算子求得了为Hamilton算子的等价条件，这些条件都是明显给出算子特性的算子系数之关系式。通常在文献中出现的Hamilton算子是$\overline{u}$-线性算子与常系数算子，例如，文献[3,4]中出现的都是常系数算子，文献[5,6]中出现的是$\overline{u}$-线性算子加常系数算子，在文献[7]中给出了一般$\overline{u}$-线性算子加常系数算子为Hamilton算子的一个定性的等价描述（关于其系数的）。然而，对于非线性的情况，还没有一般定性的等价描述（关于其系数的），就是对特殊算子要得到其等价条件，往往也是不容易的。本文对几种特殊的非线性情况进行了研究，得到了等价条件，并利用这些条件具体构造了若干例子，从而也说明了上述特殊的$\overline{u}$-非线性Hamilton算子的存在性。

二、第一型斜对称的$\overline{u}$-非线性算子

考虑下列斜对称的$\overline{u}$非线性算子H：

$$H_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta0}=\sum_{\mu}c_{\alpha\beta\mu}u_{\mu}^{(0)n}u_{\mu}^{(1)m}\quad\alpha、\beta\in I \tag{3}$$

其中n、$m\geqslant1$ $c_{\alpha\beta\mu}=-c_{\beta\alpha\mu}$且对每对$(\alpha,\beta)\in I\times I$，只有有限个$\mu\in I$使$c_{\alpha\beta\mu}$非零，（注及$u_{\mu}^{(0)n}$表示$u_{\mu}^{(0)}$的$n$次乘幂，即$(u_{\mu}^{(0)})^{n}$；余同）。

对这种特殊形式的算子H计算其$T_{\lambda\alpha\gamma}(h_1,h_2)$（$T_{\lambda\alpha\gamma}(h_1,h_2)$之定义见文献[1]或下式）：

$$\begin{aligned}
T_{\lambda\alpha\gamma}(h_1,h_2)=&\sum_{\beta}\Big[\sum_{i,j}h_1^{(i)}\frac{\partial a_{\lambda\gamma i}}{\partial u_{\beta}^{(j)}}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^{j}\sum_{k}a_{\beta\alpha k}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^{k}h_2\\
&+\frac{1}{2}\sum_{k}a_{\gamma\beta k}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^{k}\sum_{i,j}\Big(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^{j}\Big(h_1^{(i)}\frac{\partial a_{\alpha\gamma i}}{\partial u_{\beta}^{(j)}}h_2\Big)\Big]\\
=&\sum_{\beta}\Big\{\Big(h_1nc_{\lambda\gamma\beta}u_{\beta}^{(0)n-1}u_{\beta}^{(1)m}+h_1mc_{\lambda\gamma\beta}u_{\beta}^{(0)n}u_{\beta}^{(1)m-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)\Big(\sum_{\mu}c_{\beta\alpha\mu}u_{\mu}^{(0)n}u_{\mu}^{(1)m}h_2\Big)\\
&+\frac{1}{2}\sum_{\mu}c_{\gamma\beta\mu}u_{\mu}^{(0)n}u_{\mu}^{(1)m}\Big[nh_1c_{\alpha\gamma\beta}u_{\beta}^{(0)n-1}u_{\beta}^{(1)m}h_2+\Big(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)\\
&\cdot\Big(h_1mc_{\alpha\gamma\beta}u_{\beta}^{(0)n}u_{\beta}^{(1)m-1}h_2\Big)\Big]\Big\}
\end{aligned}$$

经过进一步计算和合并同类项可得：

$$\begin{aligned}
T_{\lambda\alpha\gamma}(h_1,h_2)=&\sum_{\beta,\mu}\Big\{\Big[nc_{\lambda\gamma\beta}c_{\beta\alpha\mu}u_{\beta}^{(0)n-1}u_{\beta}^{(1)m}u_{\mu}^{(0)n}u_{\mu}^{(1)m}+nmc_{\lambda\gamma\beta}c_{\beta\alpha\mu}\\
&\cdot u_{\beta}^{(0)n}u_{\beta}^{(1)m-1}u_{\mu}^{(0)n-1}u_{\mu}^{(1)m+1}+m^2c_{\lambda\gamma\beta}c_{\beta\alpha\mu}u_{\beta}^{(0)n}u_{\beta}^{(1)m-1}u_{\mu}^{(0)n}u_{\mu}^{(1)m-1}u_{\mu}^{(2)}\\
&+\frac{1}{2}nc_{\lambda\beta\mu}c_{\alpha\gamma\beta}u_{\mu}^{(0)n}u_{\mu}^{(1)m}u_{\beta}^{(0)n-1}u_{\beta}^{(1)m}-\frac{1}{2}mnc_{\lambda\beta\mu}c_{\alpha\gamma\beta}u_{\mu}^{(0)n}u_{\mu}^{(1)m}u_{\beta}^{(0)n-1}u_{\beta}^{(1)m}
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}m(m-1)c_{\lambda\beta\mu}c_{\alpha\gamma\beta}u_\mu^{(0)n}u_\mu^{(1)m}u_\beta^{(0)n}u_\beta^{(1)m-2}u_\beta^{(2)}\Big]h_1h_2$$

$$+\left(mc_{\lambda\gamma\beta}c_{\beta\alpha\mu}u_\beta^{(0)n}u_\beta^{(1)m-1}u_\mu^{(0)n}u_\mu^{(1)m}-\frac{1}{2}mc_{\lambda\beta\mu}c_{\alpha\gamma\beta}u_\mu^{(0)n}u_\mu^{(1)m}u_\beta^{(0)n}u_\beta^{(1)m-1}\right)h_1h_2^{(1)}$$

$$-\frac{1}{2}mc_{\lambda\beta\mu}c_{\alpha\gamma\beta}u_\mu^{(0)n}u_\mu^{(1)m}u_\beta^{(0)n}u_\beta^{(1)m-1}h_1^{(1)}h_2\Big\} \tag{4}$$

（注：如果 $m=1$，上式中有关 $u_\beta^{(1)m-2}$ 的项不出现）。

在上式中交换 α 和 γ 及 h_1 和 h_2 就可得到 $T_{\lambda\gamma\alpha}(h_2,h_1)$ 的表达式，这样在等式

$$T_{\lambda\alpha\gamma}(h_1,h_2)=T_{\lambda\gamma\alpha}(h_2,h_1)\qquad \forall\lambda、\alpha、\gamma\in I;\ h_1、h_2\in A \tag{5}$$

（注：这就是算子 H 为 Hamilton 算子的充要条件[1]）。

两边比较含有 $h_1h_2^{(1)}$ 的各项可得

$$mc_{\lambda\gamma\beta}c_{\beta\alpha\mu}-\frac{1}{2}mc_{\lambda\beta\mu}c_{\alpha\gamma\beta}=-\frac{1}{2}mc_{\lambda\beta\mu}c_{\gamma\alpha\beta}$$

即
$$c_{\lambda\gamma\beta}c_{\beta\alpha\mu}=c_{\gamma\alpha\beta}c_{\beta\lambda\mu} \tag{6}$$

再比较含有 $u_\beta^{(1)m-1}u_\mu^{(1)m-1}u_\mu^{(2)}h_1h_2(\beta\neq\mu)$ 的各项可得

$$m^2c_{\lambda\gamma\beta}c_{\beta\alpha\mu}=m^2c_{\lambda\alpha\beta}c_{\beta\gamma\mu}\quad(\beta\neq\mu)$$

即
$$c_{\lambda\gamma\beta}c_{\beta\alpha\mu}=c_{\lambda\alpha\beta}c_{\beta\gamma\mu}\quad(\beta\neq\mu) \tag{7}$$

由(6)(7)两式可得

$$c_{\lambda\gamma\beta}c_{\beta\alpha\mu}\overset{(6)}{=\!=}c_{\gamma\alpha\beta}\,c_{\beta\lambda\mu}\overset{(7)}{=\!=}c_{\gamma\lambda\beta}c_{\beta\alpha\mu}=-c_{\lambda\gamma\beta}c_{\beta\alpha\mu}\quad(\beta\neq\mu)$$

故
$$c_{\lambda\gamma\beta}c_{\beta\alpha\mu}=0\quad\forall\alpha、\beta、\gamma、\lambda、\mu\in I\quad\beta\neq\mu$$

最后比较含有 $u_\beta^{(1)m-1}u_\mu^{(1)m-1}u_\mu^{(2)}h_1h_2(\beta=\mu)$ 即 $u_\beta^{(1)2m-2}u_\beta^{(2)}h_1h_2$ 的各项可得

$$m^2c_{\lambda\gamma\beta}c_{\beta\alpha\beta}-\frac{1}{2}m(m-1)c_{\lambda\beta\beta}c_{\alpha\gamma\beta}=m^2c_{\lambda\alpha\beta}c_{\beta\gamma\beta}-\frac{1}{2}m(m-1)c_{\lambda\beta\beta}c_{\gamma\alpha\beta}$$

又
$$c_{\lambda\alpha\beta}c_{\beta\gamma\beta}\overset{(6)}{=\!=}c_{\alpha\gamma\beta}\,c_{\beta\lambda\beta}\overset{(6)}{=\!=}c_{\gamma\lambda\beta}c_{\beta\alpha\beta}=-c_{\lambda\gamma\beta}c_{\beta\alpha\beta}$$

$$c_{\lambda\beta\beta}c_{\alpha\gamma\beta}=-c_{\alpha\gamma\beta}c_{\beta\lambda\beta}\overset{(6)}{=\!=}-c_{\gamma\lambda\beta}c_{\beta\alpha\beta}=c_{\lambda\gamma\beta}c_{\beta\alpha\beta}$$

$$c_{\lambda\beta\beta}c_{\gamma\alpha\beta}=-c_{\lambda\beta\beta}c_{\alpha\gamma\beta}\overset{(由上式)}{=\!=}-c_{\lambda\gamma\beta}c_{\beta\alpha\beta}$$

于是
$$[2m^2-m(m-1)]c_{\lambda\gamma\beta}c_{\beta\alpha\beta}=0$$

故
$$c_{\lambda\gamma\beta}c_{\beta\alpha\beta}=0\quad\forall\alpha、\beta、\gamma、\lambda\in I$$

综上所述我们有

$$c_{\lambda\gamma\beta}c_{\beta\alpha\mu}=0\quad\forall\alpha、\beta、\gamma、\lambda、\mu\in I \tag{8}$$

反之，当(8)式成立时，由(4)式易知(5)式成立，于是可得

定理 1 形如(3)的斜对称矩阵微分算子 H：$\Omega^1\to\overline{A}$ 为 Hamilton 算子的充要条件是等式(8)成立。

例 1 设 I 有限或可列，无妨设 $I=\{0,1,\cdots k\}$ $k\geqslant0$ 或 $I=\{0,1,2\cdots\}$

$$\forall\alpha、\beta\in I\ 令\ c_{\alpha\beta\mu}=\begin{cases}[1+(-1)^\alpha][1+(-1)^\beta][1-(-1)^\mu](f(\alpha)-f(\beta))g(\alpha)\cdot g(\beta)h(\mu) & 0\leqslant\mu\leqslant p(\alpha,\beta)\\ 0 & \mu>p(\alpha,\beta)\end{cases}$$

其中 f、g、h：$I\to C$ 是三个任意的函数，p：$I\times I\to I$（p：$(\alpha,\beta)\to p(\alpha,\beta)$）也是任意的函数。

易知 $c_{\alpha\beta\mu}=-c_{\beta\alpha\mu}$，并且当下列三个条件：

①α 为奇数，②β 为奇数，③μ 为零或偶数。

有一项成立时，就有 $c_{\alpha\beta\mu}=0$，也即 $c_{\alpha\beta\mu}$ 只有当 α、β 为零或偶数，且 μ 为奇数时，才有可能不为零。利用这一点很容易得到(8)，因此由定理1知相应的算子 H：

$$H_{\alpha\beta}=\sum_{\mu=0}^{p(\alpha,\beta)}[1+(-1)^{\alpha}][1+(-1)^{\beta}][1-(-1)^{\mu}](f(\alpha)-f(\beta))\cdot g(\alpha)g(\beta)h(\mu)u_{\mu}^{(0)n}u_{\mu}^{(1)m}\quad \alpha、\beta\in I$$

（这里 n、$m\geqslant 1$）是 Hamilton 算子。

当 $I=\{0,\ 1,\ \cdots k\}$ $k\geqslant 0$ 时，特别取 $p(\alpha,\beta)=k$ α、$\beta\in I$ 得到 Hamilton 算子 H：

$$H_{\alpha\beta}=\sum_{\mu=0}^{k}[1+(-1)^{\alpha}][1+(-1)^{\beta}][1-(-1)^{\mu}](f(\alpha)-f(\beta))\cdot g(\alpha)g(\beta)h(\mu)u_{\mu}^{(0)n}u_{\mu}^{(1)m}\quad \alpha、\beta\in I$$

三、第二型斜对称矩阵微分算子

考虑如下的斜阵对称矩微分算子 H：

$$H_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta 0}=\sum_{\substack{\mu\in I\\ n\geqslant 0}}c^{n}_{\alpha\beta\mu}u_{\mu}^{(0)n}\quad \alpha、\beta\in I \tag{9}$$

其中 $c^{n}_{\alpha\beta\mu}$ 具有反称性，即 $c^{n}_{\alpha\beta\mu}=-c^{n}_{\beta\alpha\mu}$，且对每对 $(\alpha,\beta)\in I\times I$，只有有限个 $\mu\in I$ 和 $n\geqslant 0$ 使 $c^{n}_{\alpha\beta\mu}$ 非零。

象二中一样计算此形式算子的 $T_{\lambda\alpha\gamma}(h_1,h_2)$：

$$\begin{aligned}
T_{\lambda\alpha\gamma}(h_1,\ h_2)=&\sum_{\beta}\Big[h_1\Big(\sum_{l\geqslant 1}l\,c^{l}_{\lambda\gamma\beta}u_{\beta}^{(0)l-1}\Big)\Big(\sum_{\mu,n}c^{n}_{\beta\alpha\mu}u_{\mu}^{(0)n}h_2\Big)\\
&+\frac{1}{2}\Big(\sum_{\mu,n}c^{n}_{\lambda\beta\mu}u_{\mu}^{(0)n}\Big)\Big(h_1\sum_{l\geqslant 1}l\,c^{l}_{\alpha\gamma\beta}u_{\beta}^{(0)l-1}h_2\Big)\Big]\\
=&\sum_{\beta,\mu,n}\sum_{l\geqslant 1}\Big(l\,c^{l}_{\lambda\gamma\beta}c^{n}_{\beta\alpha\mu}+\frac{1}{2}l\,c^{n}_{\lambda\beta\mu}c^{l}_{\alpha\gamma\beta}\Big)u_{\mu}^{(0)n}u_{\beta}^{(0)l-1}h_1h_2\\
=&\sum_{\beta,\mu,n,t}\Big[(t+1)c^{t+1}_{\lambda\gamma\beta}c^{n}_{\beta\alpha\mu}+\frac{1}{2}(t+1)c^{n}_{\lambda\beta\mu}c^{t+1}_{\alpha\gamma\beta}\Big]u_{\mu}^{(0)n}u_{\beta}^{(0)t}h_1h_2\\
=&\sum_{\beta,\mu}\Big(c^{1}_{\lambda\gamma\beta}c^{0}_{\beta\alpha\mu}+\frac{1}{2}c^{0}_{\lambda\beta\mu}c^{1}_{\alpha\gamma\beta}\Big)h_1h_2\\
&+\sum_{n\geqslant 1}\sum_{\beta,\mu}\Big(c^{1}_{\lambda\gamma\beta}c^{n}_{\beta\alpha\mu}+\frac{1}{2}c^{n}_{\lambda\beta\mu}c^{1}_{\alpha\gamma\beta}\Big)u_{\mu}^{(0)n}h_1h_2\\
&+\sum_{t\geqslant 1}\sum_{\beta,\mu}\Big[(t+1)c^{t+1}_{\lambda\gamma\beta}c^{0}_{\beta\alpha\mu}+\frac{1}{2}(t+1)c^{0}_{\lambda\beta\mu}c^{t+1}_{\alpha\gamma\beta}\Big]u_{\beta}^{(0)t}h_1h_2\\
&+\sum_{n,t\geqslant 1}\sum_{\beta,\mu}\Big[(t+1)c^{t+1}_{\lambda\gamma\beta}c^{n}_{\beta\alpha\mu}+\frac{1}{2}(t+1)c^{n}_{\lambda\beta\mu}c^{t+1}_{\alpha\gamma\beta}\Big]u_{\mu}^{(0)n}u_{\beta}^{(0)t}h_1h_2
\end{aligned}$$

下面考虑后三项的系数：

第二项系数$\xlongequal{\{ {n \to p \atop \mu \to \tau} }\sum_{p\geq 1}\sum_{\tau}\left[\sum_{\beta}\left(c^{1}_{\lambda\gamma\beta}c^{p}_{\beta\gamma\tau}+\frac{1}{2}c^{p}_{\lambda\beta\tau}c^{1}_{\alpha\gamma\beta}\right)\right]u^{(0)p}_{\tau}$

第三项系数$\xlongequal{\{ {t\to p \atop {\beta\to\tau \atop \mu\to\beta}} }\sum_{p\geq 1}\sum_{\tau}\left\{\sum_{\beta}\left[(p+1)c^{p+1}_{\lambda\gamma\tau}c^{0}_{\tau\alpha\beta}+\frac{1}{2}(p+1)\ c^{0}_{\lambda\tau\beta}c^{p+1}_{\alpha\gamma\tau}\ \right]\right\}u^{(0)p}_{\tau}$

第四项系数$\xlongequal{n\to s}\left(\sum_{\substack{\beta\neq\mu\\ s,t\geq 1}}+\sum_{\substack{\beta=\mu\\ s,t\geq 1}}\right)\left[(t+1)c^{t+1}_{\lambda\gamma\beta}\ c^{s}_{\beta\alpha\mu}+\frac{1}{2}(t+1)c^{s}_{\lambda\beta\mu}\ c^{t+1}_{\alpha\gamma\beta}\right]u^{(0)s}_{\mu}u^{(0)t}_{\beta}$

$$=\sum_{\substack{\beta\neq\mu\\ s,t\geq 1}}\left[(t+1)c^{t+1}_{\lambda\gamma\beta}\ c^{s}_{\beta\alpha\mu}+\frac{1}{2}(t+1)c^{s}_{\lambda\beta\mu}\ c^{t+1}_{\alpha\gamma\beta}\right]u^{(0)s}_{\mu}u^{(0)t}_{\beta}$$

$$+\sum_{\tau}\sum_{p\geq 2}\sum_{q=1}^{p-1}\left[(q+1)c^{q+1}_{\lambda\gamma\tau}c^{p-q}_{\tau\alpha\tau}+\frac{1}{2}(q+1)c^{p-q}_{\lambda\tau\tau}\ c^{q+1}_{\alpha\gamma\tau}\right]u^{(0)p}_{\tau}$$

于是
$$\begin{aligned}T_{\lambda\alpha\gamma}(h_1,h_2)=&\sum_{\beta,\mu}\left(c^{1}_{\lambda\gamma\beta}\,c^{0}_{\beta\alpha\mu}+\frac{1}{2}c^{0}_{\lambda\beta\mu}\,c^{1}_{\alpha\gamma\beta}\right)h_1h_2\\
&+\sum_{\tau}\left[\sum_{\beta}\left(c^{1}_{\lambda\gamma\beta}c^{1}_{\beta\alpha\tau}+\frac{1}{2}c^{1}_{\lambda\beta\tau}c^{1}_{\alpha\gamma\beta}+2c^{2}_{\lambda\gamma\tau}c^{0}_{\tau\alpha\beta}+c^{0}_{\lambda\tau\beta}c^{2}_{\alpha\gamma\tau}\ \right)\right]u^{(0)}_{\tau}h_1h_2\\
&+\sum_{\tau}\sum_{p\geq 2}\left\{\sum_{\beta}\left(c^{1}_{\lambda\gamma\beta}\,c^{p}_{\beta\alpha\tau}+\frac{1}{2}c^{p}_{\lambda\beta\tau}c^{1}_{\alpha\gamma\beta}+(p+1)c^{p+1}_{\lambda\gamma\tau}c^{0}_{\tau\alpha\beta}\right.\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}(p+1)c^{0}_{\lambda\tau\beta}c^{p+1}_{\alpha\gamma\tau}\right)+\sum_{q=1}^{p-1}\left[(q+1)c^{q+1}_{\lambda\gamma\tau}c^{p-q}_{\tau\alpha\tau}\right.\\
&\left.\left.+\frac{1}{2}(q+1)c^{p-q}_{\lambda\tau\tau}c^{q+1}_{\alpha\gamma\tau}\right]\right\}u^{(0)p}_{\tau}h_1h_2+\sum_{\substack{\beta\neq\mu\\ s,t\geq 1}}\left[(t+1)c^{t+1}_{\lambda\gamma\beta}c^{s}_{\beta\alpha\mu}\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}(t+1)c^{s}_{\lambda\beta\mu}\,c^{t+1}_{\alpha\gamma\beta}\right]u^{(0)s}_{\mu}\,u^{(0)t}_{\beta}h_1\,h_2\end{aligned}\tag{10}$$

$$\begin{aligned}\xlongequal{记}\ &d_{\lambda\gamma\alpha}h_1h_2+\sum_{\tau}d_{\lambda\gamma\alpha}(\tau)u^{(0)}_{\tau}h_1h_2+\sum_{\tau}\sum_{p\geq 2}d_{\lambda\gamma\alpha}(\tau;\ p)u^{(0)p}_{\tau}h_1h_2\\
&+\sum_{\substack{\beta\neq\mu\\ s,t\geq 1}}d_{\lambda\gamma\alpha}(\beta,\ \mu;\ s,\ t)u^{(0)s}_{\mu}u^{(0)t}_{\beta}h_1h_2\end{aligned}$$

由于(10)式关于h_1、h_2对称，故只需交换(10)式中的α和γ就可得到$T_{\lambda\gamma\alpha}(h_2,\ h_1)$的表达式。注意(10)式中四大项的独立性及后三项中许多分项的独立性，比较等式(5)两边相同项的系数就可知道等式(5)等价于下列四个等式：

第一个等式是 $d_{\lambda\gamma\alpha}=d_{\lambda\alpha\gamma}$

由$c^{n}_{\alpha\beta\mu}$的反称性知此式即为

$$\sum_{\beta,\mu}(c^{1}_{\lambda\gamma\beta}c^{0}_{\beta\alpha\mu}+c^{1}_{\gamma\alpha\beta}c^{0}_{\beta\lambda\mu}+c^{1}_{\alpha\lambda\beta}c^{0}_{\beta\gamma\mu})=0\qquad\forall\lambda、\gamma、\alpha\in I\tag{11}$$

第二个等式是 $d_{\lambda\gamma\alpha}(\tau)=d_{\lambda\alpha\gamma}(\tau)\quad\forall\tau\in I$

同样由$c^{n}_{\alpha\beta\mu}$的反称性知此式即为

$$\begin{aligned}&\sum_{\beta}[(c^{1}_{\lambda\gamma\beta}c^{1}_{\beta\alpha\tau}+c^{1}_{\gamma\alpha\beta}c^{1}_{\beta\lambda\tau}+c^{1}_{\alpha\lambda\beta}c^{1}_{\beta\gamma\tau})+2(c^{2}_{\lambda\gamma\tau}c^{0}_{\tau\alpha\beta}+c^{2}_{\gamma\alpha\tau}c^{0}_{\tau\lambda\beta}+c^{2}_{\alpha\lambda\tau}c^{0}_{\tau\gamma\beta})]\\
&=0\quad\forall\lambda、\gamma、\alpha、\tau\in I\end{aligned}\tag{12}$$

第三个等式是 $d_{\lambda\gamma\alpha}(\tau;\ p)=d_{\lambda\alpha\gamma}(\tau;\ p)\quad\forall\tau\in I\ \ p\geq 2$

同理此式即为

$$\sum_{\beta}[(c^{1}_{\lambda\gamma\beta}c^{p}_{\beta\alpha\tau}+c^{1}_{\gamma\alpha\beta}c^{p}_{\beta\lambda\tau}+c^{1}_{\alpha\lambda\beta}c^{p}_{\beta\gamma\tau})+(p+1)(c^{p+1}_{\lambda\gamma\tau}c^{0}_{\tau\alpha\beta}+c^{p+1}_{\gamma\alpha\tau}c^{0}_{\tau\lambda\beta}$$

$$+c^{p+1}_{\alpha\lambda\tau}c^{0}_{\tau\gamma\beta})]+\sum_{q=1}^{p-1}(q+1)(c^{q+1}_{\lambda\gamma\tau}c^{p-q}_{\tau\alpha\tau}+c^{q+1}_{\gamma\alpha\tau}c^{p-q}_{\tau\lambda\tau}+c^{q+1}_{\alpha\lambda\tau}c^{p-q}_{\tau\gamma\tau})=0$$

$$\forall\lambda、\gamma、\alpha、\tau\in I \quad p\geqslant 2 \tag{13}$$

第四个等式是 $d_{\lambda\gamma\alpha}(\beta,\ \mu;\ s,\ t)=d_{\lambda\alpha\gamma}(\beta,\ \mu;\ s,\ t) \quad \forall\beta、\mu\in I \ \beta\neq\mu \ s、t\geqslant 1$

同理此式即为

$$(t+1)(c^{t+1}_{\lambda\gamma\beta}c^{s}_{\beta\alpha\mu}+c^{t+1}_{\gamma\alpha\beta}c^{s}_{\beta\lambda\mu}+c^{t+1}_{\alpha\lambda\beta}c^{s}_{\beta\gamma\tau})+(s+1)(c^{s+1}_{\lambda\gamma\mu}c^{t}_{\mu\alpha\beta}$$

$$+c^{s+1}_{\gamma\alpha\mu}c^{t}_{\mu\lambda\beta}+c^{s+1}_{\alpha\lambda\mu}c^{t}_{\mu\gamma\beta})=0$$

$$\forall\lambda、\gamma、\alpha、\beta、\mu\in I \quad \beta\neq\mu \ s、t\geqslant 1 \tag{14}$$

于是我们可以得到下列结论：

定理 2 形如(9)的斜对称矩阵微分算子 H：$\Omega^1\to\overline{A}$ 为 Hamilton 算子的充要条件是等式(11-14)成立。

当 $H_{\alpha\beta}=\sum\limits_{n\neq 2}\sum\limits_{\mu} c^{n}_{\alpha\beta\mu}u^{(0)n}_{\mu} \quad \alpha、\beta\in I$ 时，等式(12)就变成

$$\sum_{\beta}(c^{1}_{\lambda\gamma\beta}c^{1}_{\beta\alpha\tau}+c^{1}_{\gamma\alpha\beta}c^{1}_{\beta\lambda\tau}+c^{1}_{\alpha\lambda\beta}c^{1}_{\beta\gamma\tau})=0 \ \forall\lambda、\gamma、\alpha、\tau\in I \tag{15}$$

这说明此时$\{c^{1}_{\alpha\beta\mu}\}$是一个李代数的一组构造常数。于是如令 $E=\{e_\alpha|\alpha\in I\}$，$X$ 为 E 在复数域C上张成的线性空间 $L_C(E)$，在 X 上定义一个双线性二元运算如下：

$$e_\alpha * e_\beta=\sum_{\mu} c^{1}_{\alpha\beta\mu}e_\mu \tag{16}$$

则$\langle X,\ *\rangle$是一个李代数。

特别当 $H_{\alpha\beta}=\sum\limits_{\mu} c^{0}_{\alpha\beta\mu}+\sum\limits_{\mu} c^{1}_{\alpha\beta\mu}u^{(0)}_{\mu} \quad \alpha、\beta\in I$ (17)

时，等式(13, 14)总成立，因此得到下列结论：

推论 2.1 形如(17)的斜对称矩阵微分算子 H 为 Hamilton 算子 $\Longleftrightarrow$ 等式(11)成立，且$\langle X,\ *\rangle$是一个李代数。

例 2 取 $c^{0}_{\alpha\beta\mu}=cc^{1}_{\alpha\beta\mu}$ $c\in C$ $\{c^{1}_{\alpha\beta\mu}\}$是一组李结构常数，即满足(15)式，则由推论 2.1 知形如(17)的算子 H 是 Hamilton 算子。

更特别当 $H_{\alpha\beta}=\sum\limits_{\mu} c^{1}_{\alpha\beta\mu}u^{(0)}_{\mu}$ $\alpha、\beta\in I$ (18)

时，(11)式总成立，故有

推论 2.2 形如(18)的斜对称矩阵微分算子 H 为 Hamilton 算子 $\Longleftrightarrow\langle X,\ *\rangle$ 是一个李代数。

这个结论在文献[1]中得到过，其中之算子H是一个$\overline{u}$-线性的算子。

另外，当 $H_{\alpha\beta}=\sum\limits_{n\geqslant 2}\sum\limits_{\mu} c^{n}_{\alpha\beta\mu}u^{(0)n}_{\mu} \quad \alpha、\beta\in I$ (19)

时，等式(11, 12)总成立，(13)式变成

$$\sum_{p=1}^{p-1}(q+1)(c^{q+1}_{\lambda\gamma\tau}c^{p-q}_{\tau\alpha\tau}+c^{q+1}_{\gamma\alpha\tau}c^{p-q}_{\tau\lambda\tau}+c^{q+1}_{\alpha\lambda\tau}c^{p-q}_{\tau\gamma\tau})=0 \quad \forall\lambda、\gamma、\alpha、\tau\in I \quad p\geqslant 2 \tag{20}$$

因此由定理 2 可得：

推论 2.3 形如(19)的斜对称矩阵微分算子 H 为 Hamilton 算子 $\Longleftrightarrow$ 等式(14)和(20)成立。

特别地当 $H_{\alpha\beta}=\sum_{\mu}c^{m}_{\alpha\beta\mu}u^{(0)m}_{\mu}\quad \alpha、\beta\in I\quad m\geqslant 2$ (21)

时，如果 $p\geqslant 2$ 且 $\neq 2m-1(\geqslant 2)$，则(20)恒成立，如果 $p=2m-1$，此时 q 只能取 $m-1(\geqslant 1)$，等式(20)变成

$$c^{m}_{\lambda\gamma\tau}c^{m}_{\tau\alpha\tau}+c^{m}_{\gamma\alpha\tau}c^{m}_{\tau\lambda\tau}+c^{m}_{\alpha\lambda\tau}c^{m}_{\tau\gamma\tau}=0\quad\forall\lambda、\gamma、\alpha、\tau\in I \tag{22}$$

另易知等式(14)等价于

$$c^{m}_{\lambda\gamma\beta}c^{m}_{\beta\alpha\mu}+c^{m}_{\gamma\alpha\beta}c^{m}_{\beta\lambda\mu}+c^{m}_{\alpha\lambda\beta}c^{m}_{\beta\gamma\mu}=0\quad\forall\lambda、\gamma、\alpha、\beta、\mu\in I\quad \beta\neq\mu \tag{23}$$

(22)和(23)两式即为

$$c^{m}_{\lambda\gamma\beta}c^{m}_{\beta\alpha\mu}+c^{m}_{\gamma\alpha\beta}c^{m}_{\beta\lambda\mu}+c^{m}_{\alpha\lambda\beta}c^{m}_{\beta\gamma\mu}=0\quad\forall\lambda、\gamma、\alpha、\beta、\mu\in I \tag{24}$$

于是由推论 2.3 得

推论 2.4 形如(21)的斜对称矩阵微分算子 H 为 Hamilton 算子$\Longleftrightarrow$等式(24)成立。

例 3 设 $I=\{0,1,\cdots,n\}\ n\geqslant 1$，取 $c_{\alpha\beta\mu}=(f(\alpha)-f(\beta))g(\mu)\quad \alpha、\beta、\mu\in I$ 其中 $f、g: I\to C$ 是任意的函数。

显然 $c_{\alpha\beta\mu}=-c_{\beta\alpha\mu}$，并且 $\forall\lambda、\alpha、\beta、\gamma、\mu\in I$ 有

$$\begin{aligned}&c_{\lambda\gamma\beta}c_{\beta\alpha\mu}+c_{\gamma\alpha\beta}c_{\beta\lambda\mu}+c_{\alpha\lambda\beta}c_{\beta\gamma\mu}=(f(\lambda)-f(\gamma))g(\beta)(f(\beta)-f(\alpha))g(\mu)\\&+(f(\gamma)-f(\alpha))g(\beta)(f(\beta)-f(\lambda))g(\mu)+(f(\alpha)-f(\lambda))g(\beta)(f(\beta)\\&-f(\gamma))g(\mu)=0.g(\beta)g(\mu)=0\end{aligned}$$

因此由推论 2.2 和 2.4 知相应的算子H：

$$H_{\alpha\beta}=\sum_{\mu=0}^{n}(f(\alpha)-f(\beta))g(\mu)u^{(0)m}_{\mu}\quad \alpha、\beta\in I\quad m\geqslant 1$$

是 Hamilton 算子，当 $m>1$ 时，算子 H 是$\overline{u}$-非线性的。

四、第三型矩阵微分算子

考虑如下的矩降微分算子H：

$$H_{\alpha\beta}=\sum_{\mu\in I}\left(c_{\alpha\beta\mu}a_{\mu}+d_{\alpha\beta\mu}b_{\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\quad \alpha、\beta\in I \tag{25}$$

其中 $d_{\alpha\beta\mu}=c_{\alpha\beta\mu}+c_{\beta\alpha\mu}$，且对每对$(\alpha,\beta)\in I\times I$ 只有有限个 $\mu\in I$ 使 $c_{\alpha\beta\mu}$ 非零，$a_{\mu}、b_{\mu}\in A\quad \mu\in I$

易知当 $a_{\mu}=b^{(1)}_{\mu}$ 时，算子H斜对称，此时算子H有如下形式

$$H_{\alpha\beta}=\sum_{\mu\in I}\left(c_{\alpha\beta\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}b_{\mu}+c_{\beta\alpha\mu}b_{\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\quad \alpha、\beta\in I \tag{26}$$

现讨论较简单的情形，取 $b_{\mu}=u^{(0)n}_{\mu}\ n>1$，此时 $a_{\mu}=b^{(1)}_{\mu}=nu^{(0)n-1}u^{(1)}_{\mu}$，这样得到$\overline{u}$-非线性斜对称矩阵微分算子$H$：

$$H_{\alpha\beta}=\sum_{\mu}\left(nc_{\alpha\beta\mu}u^{(0)n-1}u^{(1)}_{\mu}+d_{\alpha\beta\mu}u^{(0)n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\quad \alpha、\beta\in I\quad n>1 \tag{27}$$

同前先计算 H 的 $T_{\lambda\alpha\gamma}(h_1,h_2)$，然后比较等式(5)。通过计算和同类项的合并可以得到：

$$T_{\lambda\alpha\gamma}(h_1,h_2)=\sum_{\beta,\mu}\Big\{\Big[n^2(n-1)c_{\lambda\gamma\beta}c_{\beta\alpha\mu}u^{(0)n-2}_{\beta}u^{(1)}_{\beta}u^{(0)n-1}_{\beta}u^{(1)}_{\mu}$$

$$+n^2(n-1)c_{\lambda\gamma\beta}c_{\beta\alpha\mu}u_\beta^{(0)n-1}u_\mu^{(0)n-2}u_\mu^{(1)2}+n^2c_{\lambda\gamma\beta}c_{\beta\alpha\mu}u_\beta^{(0)n-1}u_\mu^{(0)n-1}u_\mu^{(2)}\Big]h_1h_2$$

$$+\Big[n(n-1)c_{\lambda\gamma\beta}d_{\beta\alpha\mu}u_\beta^{(0)n-2}u_\beta^{(1)}u_\mu^{(0)n}+n^2c_{\lambda\gamma\beta}c_{\beta\alpha\mu}u_\beta^{(0)n-1}u_\mu^{(0)n-1}u_\mu^{(1)}$$

$$+n^2c_{\lambda\gamma\beta}d_{\beta\alpha\mu}u_\beta^{(0)n-1}u_\mu^{(0)n-1}u_\mu^{(1)}-\frac{1}{2}n^2c_{\lambda\beta\mu}c_{\alpha\gamma\beta}u_\mu^{(0)n-1}u_\mu^{(1)}u_\beta^{(0)n-1}$$

$$-\frac{1}{2}n(n-1)d_{\lambda\beta\mu}c_{\alpha\gamma\beta}u_\mu^{(0)n}u_\beta^{(0)n-2}u_\beta^{(1)}\Big]h_1h_2^{(1)}+\Big(nc_{\lambda\gamma\beta}d_{\beta\alpha\mu}u_\beta^{(0)n-1}u_\mu^{(0)n}$$

$$-\frac{1}{2}nd_{\lambda\beta\mu}c_{\alpha\gamma\beta}u_\mu^{(0)n}u_\beta^{(0)n-1}\Big)h_1h_2^{(2)}+\Big[n^2d_{\lambda\gamma\beta}c_{\beta\alpha\mu}u_\beta^{(0)n-1}u_\mu^{(0)n-1}u_\mu^{(1)}$$

$$-\frac{1}{2}n^2c_{\lambda\beta\mu}c_{\alpha\gamma\beta}u_\mu^{(0)n-1}u_\mu^{(1)}u_\beta^{(0)n-1}+\frac{1}{2}n^2c_{\lambda\beta\mu}d_{\alpha\gamma\beta}u_\mu^{(0)n-1}u_\mu^{(1)}u_\beta^{(0)n-1}$$

$$-\frac{1}{2}d_{\lambda\beta\mu}c_{\alpha\gamma\beta}n(n-1)u_\mu^{(0)n}u_\mu^{(0)n-2}u_\beta^{(1)}+\frac{1}{2}n(n-1)d_{\lambda\beta\mu}d_{\alpha\gamma\beta}u_\mu^{(0)n}u_\beta^{(0)n-2}u_\beta^{(1)}\Big]h_1^{(1)}h_2$$

$$+\Big(nd_{\lambda\gamma\beta}d_{\beta\alpha\mu}u_\beta^{(0)n-1}u_\mu^{(0)n}-nd_{\lambda\beta\mu}c_{\alpha\gamma\beta}u_\mu^{(0)n}u_\beta^{(0)n-1}$$

$$+\frac{1}{2}nd_{\lambda\beta\mu}d_{\alpha\gamma\beta}u_\mu^{(0)n}u_\beta^{(0)n-1}\Big)h_1^{(1)}h_2^{(1)}+\frac{1}{2}nd_{\lambda\beta\mu}c_{\gamma\alpha\beta}u_\mu^{(0)n}u_\beta^{(0)n-1}h_1^{(2)}h_2\Big\} \qquad (28)$$

在上式中交换指标γ、α和h_1、h_2就可得到$T_{\lambda\alpha\gamma}(h_1,\ h_2)$的表达式。现由这种表达式出发考虑等式(5)的等价条件。先比较含有$u_\mu^{(2)}h_1h_2$的各项系数可得

$$\sum_\beta n^2c_{\lambda\gamma\beta}c_{\beta\alpha\mu}u_\beta^{(0)n-1}=\sum_\beta n^2c_{\lambda\alpha\beta}c_{\beta\gamma\mu}u_\beta^{(0)n-1}$$

这等价于 $c_{\lambda\gamma\beta}c_{\beta\alpha\mu}=c_{\lambda\alpha\beta}c_{\beta\gamma\mu}\quad\forall\lambda、\gamma、\alpha、\beta、\mu\in I$ (29)

再比较含$h_1h_2^{(2)}$的各项系数可得

$$\sum_{\beta,\mu}\Big(nc_{\lambda\gamma\beta}d_{\beta\alpha\mu}u_\beta^{(0)n-1}u_\mu^{(0)n}-\frac{1}{2}nd_{\lambda\beta\mu}c_{\alpha\gamma\beta}u_\mu^{(0)n}u_\beta^{(0)n-1}=\sum_{\beta,\mu}\frac{1}{2}nd_{\lambda\beta\mu}c_{\alpha\gamma\beta}u_\mu^{(0)n}u_\beta^{(0)n-1}$$

这等价于 $c_{\lambda\gamma\beta}d_{\beta\alpha\mu}-\frac{1}{2}d_{\lambda\beta\mu}c_{\alpha\gamma\beta}=\frac{1}{2}d_{\lambda\beta\mu}c_{\alpha\gamma\beta}$

又 $d_{\lambda\beta\mu}=d_{\beta\alpha\mu}$，故上式即为

$$c_{\lambda\gamma\beta}d_{\beta\alpha\mu}=c_{\alpha\gamma\beta}d_{\beta\lambda\mu}\quad\forall\lambda、\gamma、\alpha、\beta、\mu\in I \qquad (30)$$

我们说等式(5)成立的充要条件为(29，30)成立。上已证了必要性，下面证明其充分性。

设(29，30)两式成立，为证$T_{\lambda\alpha\gamma}(h_1,\ h_2)$关于$\alpha$、$\gamma$和$h_1$、$h_2$对称，只须验证$h_1h_2$、$h_1h_2^{(1)}$、$h_1h_2^{(2)}$、$h_1^{(1)}h_2^{(1)}$的系数相等即可。

显然，h_1h_2的系数相等$\Longleftrightarrow$(29)成立，$h_1h_2^{(2)}$的系数相等$\Longleftrightarrow$(30)成立，因此h_1h_2、$h_1h_2^{(2)}$的系数相等没问题。

考虑$h_1^{(1)}h_2^{(1)}$的每项系数。由于

$$\Big(d_{\lambda\gamma\beta}d_{\beta\alpha\mu}-d_{\lambda\beta\mu}c_{\alpha\gamma\beta}+\frac{1}{2}d_{\lambda\beta\mu}d_{\alpha\gamma\beta}\Big)-\Big(d_{\lambda\alpha\beta}d_{\beta\gamma\mu}-d_{\lambda\beta\mu}d_{\gamma\alpha\beta}+\frac{1}{2}d_{\lambda\beta\mu}d_{\gamma\alpha\beta}\Big)$$

$$=d_{\lambda\gamma\beta}d_{\beta\alpha\mu}-d_{\lambda\beta\mu}c_{\alpha\gamma\beta}-d_{\lambda\alpha\beta}d_{\beta\gamma\mu}+d_{\lambda\beta\mu}c_{\gamma\alpha\beta}$$

$$=d_{\lambda\gamma\beta}d_{\beta\alpha\mu}-c_{\alpha\gamma\beta}d_{\beta\lambda\mu}-d_{\lambda\alpha\beta}d_{\beta\gamma\mu}+c_{\gamma\alpha\beta}d_{\beta\lambda\mu}$$

$$\overset{(30)}{=\!=}d_{\lambda\gamma\beta}d_{\beta\alpha\mu}-c_{\lambda\gamma\beta}d_{\beta\alpha\mu}-d_{\lambda\alpha\beta}d_{\beta\gamma\mu}+c_{\lambda\alpha\beta}d_{\beta\gamma\mu}$$

$$=c_{\gamma\lambda\beta}d_{\beta\alpha\mu}-c_{\alpha\lambda\beta}d_{\beta\gamma\mu}\overset{(30)}{=\!=}0$$

故 $h_1^{(1)}h_2^{(1)}$ 的系数是相等的。

下面考虑 $h_1h_2^{(1)}$ 的系数。先考虑含 $u_\mu^{(0)n}u_\beta^{(0)n-2}u_\beta^{(1)}$ 的各项

由于 $$\left(c_{\lambda\gamma\beta}d_{\beta\alpha\mu}-\frac{1}{2}d_{\lambda\beta\mu}c_{\alpha\gamma\beta}\right)-\left(-\frac{1}{2}d_{\lambda\beta\mu}c_{\gamma\alpha\beta}+\frac{1}{2}d_{\lambda\beta\mu}d_{\gamma\alpha\beta}\right)$$

$$=c_{\lambda\gamma\beta}d_{\beta\alpha\mu}-\frac{1}{2}d_{\lambda\beta\mu}c_{\alpha\gamma\beta}-\frac{1}{2}d_{\lambda\beta\mu}c_{\alpha\gamma\beta}$$

$$=c_{\lambda\gamma\beta}d_{\beta\alpha\mu}-c_{\alpha\gamma\beta}d_{\beta\lambda\mu}\overset{(30)}{=\!=}0$$

故含有 $u_\mu^{(0)n}u_\beta^{(0)n-2}u_\beta^{(1)}$ 的系数相等。再考虑含 $u_\beta^{(0)n-1}u_\mu^{(0)n-1}u_\mu^{(1)}$ 的各项，由于

$$\left(c_{\lambda\gamma\beta}c_{\beta\alpha\mu}+c_{\lambda\gamma\beta}d_{\beta\alpha\mu}-\frac{1}{2}c_{\lambda\beta\mu}c_{\alpha\gamma\beta}\right)-\left(d_{\lambda\alpha\beta}c_{\beta\gamma\mu}-\frac{1}{2}c_{\lambda\beta\mu}c_{\gamma\alpha\beta}+\frac{1}{2}c_{\lambda\beta\mu}d_{\gamma\alpha\beta}\right)$$

$$=c_{\lambda\gamma\beta}c_{\beta\alpha\mu}+c_{\lambda\gamma\beta}d_{\beta\alpha\mu}-\frac{1}{2}c_{\lambda\beta\mu}c_{\alpha\gamma\beta}-(c_{\lambda\alpha\beta}+c_{\alpha\lambda\beta})c_{\beta\gamma\mu}-\frac{1}{2}c_{\lambda\beta\mu}c_{\alpha\gamma\beta}$$

$$=(c_{\lambda\gamma\beta}c_{\beta\alpha\mu}-c_{\lambda\alpha\beta}c_{\beta\gamma\mu})+c_{\lambda\gamma\beta}d_{\beta\alpha\mu}-c_{\lambda\beta\mu}c_{\alpha\gamma\beta}-c_{\alpha\lambda\beta}c_{\beta\gamma\mu}$$

$$\overset{(29)}{=\!=}c_{\lambda\gamma\beta}d_{\beta\alpha\mu}-c_{\lambda\beta\mu}c_{\alpha\gamma\beta}-c_{\alpha\gamma\beta}c_{\beta\lambda\mu}=c_{\lambda\gamma\beta}d_{\beta\alpha\mu}-c_{\alpha\gamma\beta}d_{\beta\lambda\mu}\overset{(30)}{=\!=}0$$

因此含有 $u_\beta^{(0)n-1}u_\mu^{(0)n-1}u_\mu^{(1)}$ 的系数也相等。从而 $h_1h_2^{(1)}$ 的系数是相等的。

综上所述，我们可以得到如下定理：

定理 3 形如(27)，即下列形式的 $\bar{u}$-非线性斜对称矩阵微分算子 H：

$$H_{\alpha\beta}=\sum_\mu\left(nc_{\alpha\beta\mu}u_\mu^{(0)n-1}u_\mu^{(1)}+d_{\alpha\beta\mu}u_\mu^{(0)n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)=\sum_\mu\left(c_{\alpha\beta\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_\mu^{(0)n}+c_{\beta\alpha\mu}u_\mu^{(0)n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\alpha、\beta\in I$$

（其中 $n>1$，$d_{\alpha\beta\mu}=c_{\alpha\beta\mu}+c_{\beta\alpha\mu}$，且对每对 $(\alpha,\beta)\in I\times I$ 只有有限个 $\mu\in I$ 使 $c_{\alpha\beta\mu}$ 非零）为 Hamilton 算子的充要条件是等式(29，30)成立，即

$$c_{\lambda\gamma\beta}c_{\beta\alpha\mu}=c_{\lambda\alpha\beta}c_{\beta\gamma\mu}\quad\forall\lambda、\gamma、\alpha、\beta、\mu\in I$$
$$c_{\lambda\gamma\beta}d_{\beta\alpha\mu}=c_{\alpha\gamma\beta}d_{\beta\lambda\mu}\quad\forall\lambda、\gamma、\alpha、\beta、\mu\in I$$

下面讨论 $c_{\alpha\beta\mu}$ 反称和对称的两种特殊情况。

当 $c_{\alpha\beta\mu}$ 反称时即 $c_{\alpha\beta\mu}=-c_{\beta\alpha\mu}$ 时，(30)式始终成立，又

$$c_{\lambda\gamma\beta}c_{\beta\alpha\mu}\overset{(29)}{=\!=}c_{\lambda\alpha\beta}c_{\beta\gamma\mu}=-c_{\alpha\lambda\beta}c_{\beta\gamma\mu}\overset{(29)}{=\!=}-c_{\alpha\gamma\beta}c_{\beta\lambda\mu}$$

$$=c_{\gamma\alpha\beta}c_{\beta\lambda\mu}\overset{(29)}{=\!=}c_{\gamma\lambda\beta}c_{\beta\alpha\mu}=-c_{\lambda\gamma\beta}c_{\beta\alpha\mu}$$

故 $$c_{\lambda\gamma\beta}c_{\beta\alpha\mu}=0$$

这就是等式(8)，反之一旦有(8)式就有(29)。因此这时算子 H 为 Hamilton 算子 $\Longleftrightarrow$ 等式(8)成立。这是定理1当 $m=1$ 时的特殊情况。

当 $c_{\alpha\beta\mu}$ 对称时即 $c_{\alpha\beta\mu}=c_{\beta\alpha\mu}$ 时，(30)就是(29)，故有

推论 3.1 下列形式的斜对称矩阵微分算子 H：

$$H_{\alpha\beta}=\sum_{\mu} c_{\alpha\beta\mu}\left(\frac{d}{dx}u_{\mu}^{(0)n}+u_{\mu}^{(0)n}\frac{d}{dx}\right) \quad \alpha、\beta\in I \tag{31}$$

（其中 $n>1$，$c_{\alpha\beta\mu}=c_{\beta\alpha\mu}$，且对每对 $(\alpha,\beta)\in I\times I$ 只有有限个 $\mu\in I$ 使 $c_{\alpha\beta\mu}$ 非零）为 Hamilton 算子$\Longleftrightarrow$等式(29)成立，即

$$c_{\lambda\gamma\mu}c_{\beta\alpha\mu}=c_{\lambda\alpha\beta}c_{\beta\gamma\mu} \quad \forall\lambda、\gamma、\alpha、\beta、\mu\in I$$

例 4 设 I 有限，取 $I=\{0, 1, \cdots, m\}$ $m\geqslant 0$。

令 $c_{\alpha\beta\mu}=p(\alpha)p(\beta)q(\mu)$ $\alpha、\beta、\mu\in I$ 其中 $p、q: I\to C$ 是任意函数。由于 $c_{\alpha\beta\mu}$ 对称，且满足(29)，故由推论 3.1 知下列算子 H：

$$H_{\alpha\beta}=\sum_{\mu=0}^{m} p(\alpha)p(\beta)q(\mu)\left(\frac{d}{dx}u_{\mu}^{(0)n}+u_{\mu}^{(0)n}\frac{d}{dx}\right) \quad \alpha、\beta\in I \tag{32}$$

（其中 $n>1$）是 Hamilton 算子。

特别地，当①$c_{\alpha\beta\mu}=c\neq 0$；②$c_{\alpha\beta\mu}=(\alpha+1)^k(\beta+1)^k$ $k\in N$；③$c_{\alpha\beta\mu}=(\alpha+1)^k(\beta+1)^k\cdot(\mu+1)^l$ $k、l\in N$
时，相应的形如(32)的算子都是 Hamilton 算子。

更特别地，当 $m=0$ 时① 的情形给出 Hamilton 算子 $H=c\frac{d}{dx}u^n+cu^n\frac{d}{dx}$ $n>1$ $c\neq 0$；当 $n=1$ 时，这个算子 H 也是 Hamilton 算子，这在文献[1, 7, 8]中已分别得证过，此时算子 H 是 u-线性算子。一般地当 $n=1$ 时，形如(27)的算子 H 是 $\overline{u}$-线性的，它的 Hamilton 性已讨论过[1]，但其系数关系式与 $\overline{u}$-非线性的情形即 $n>1$ 时不同，这说明线性和非线性情形之间存在着本质的差别。

致谢：

本文得到了屠规彰教授的热情指点，作者谨在此表示诚挚的感谢。

参 考 文 献

[1] И.М.Гельфанд, И.Я.Дорфман, Функц.анализ, т.13, вып.4, 13-30 (1979)
[2] ——, Л.А.Дикий, УМН, т.30, вып.5, 67-100 (1975)
[3] J.M.Alberty, T.Koikawa and R.Sasaki, Physica 5D(1982), 43
[4] R.Sasaki, Physica D, Vol.5, 66(1982)
[5] G.Z.Tu, Il Nuovo Cimento, Vol.73B, №.1, 15(1983)
[6] M.Boiti, J.J.P.Leon, and F.Pempinelli, J.Math.Phys., Vol.25, №.6, 1725(1984)
[7] И.М.Гельфанд, И.Я.Дорфман, Функц.анализ, т.15, вып.3, 23-40 (1981)
[8] 马文秀：两类哈密尔顿算子之研究，中国科学院研究生院学报，第3卷，第2期，37-48 (1986)

Strict Optimum Confidence Bounds on the Reliability of a Complex system with Exponential Component Lives

Chen Minghui Fan Weimin

Abstract

In this paper, strict optimum confidence bounds of the complex system reliability Rs $(\bar{t})$ given by [I] have been deduced, on the basis of the component data obtained from lifetime tests with a fixed same time interval inspection and special replacement.

key words system reliability, strictly optimum confidence bounds, component data, randomization

The Equivalent Conditions of Several $\bar{u}$–Nonlinear Hamiltonian Operators

Ma Wenxiu

Abstract

In the study of the generalized Hamiltonian structures of nonlinear evolution equations, the study of the Hamiltonian operators is essential. In this paper several $\bar{u}$-nonlinear matrix differential operators are introduced. By adopting the Gelfand's algebraic method, their equivalent conditions were acquired. With these conditions as Hamiltonian operators, many special cases were considered. Some examples are also given in this paper to demonstrate the existence of non-trivial $\bar{u}$-nonlinear Hamiltonian operators mentioned above.

key words matrix differential operator, lie algebra, Hamiltonian operator, $\bar{u}$-nonlinear operator, coefficient condition