第3卷 第2期 研究生院学报 Vol. 3. № 2
1986年 8月 JOURNAL OF GRADUATE SCHOOL Aug. 1986

两类哈密尔顿算子之研究

马 文 秀*
(上海交通大学)

摘 要

在本文中，我们研究两类特殊形式的算子$H_l^1(l\geqslant0)$、$H_l^2(l\geqslant0)$，并且考虑它们与常系数算子K的和算子$H_l^1+K(l\geqslant0)$、$H_l^2+K(l\geqslant0)$，然后我们找出上述算子为哈密尔顿（Hamilton）算子的充要条件。从这些条件我们提出了若干例子；从而生成了一些哈密尔顿算子，文献[8，9]中的算子是其中之特例。

1. 前 言

孤立子概念提出以来[1]，其理论得到了很大的发展，内容日益丰富。孤立子概念的提出和相应数学理论的发展已被列为近十余年来数学领域中的一项重大进展[2]。

研究表明：许多具有孤立子解的方程都可以改写成类似于经典Hamilton方程的一种所谓广义Hamilton形式

$$\bar{u}_t=H\frac{\delta G}{\delta\bar{u}}\tag{1}$$

其中 $\bar{u}=\{u_k\,|\,k\in I\}$（$I$是一个任意的指标集），$G=G(\bar{u})$ 是一个被称为Hamilton函数的标量函数，$\frac{\delta}{\delta\bar{u}}$是变分导数[3]，$H=H(\bar{u})$是一个所谓的哈密尔顿（Hamilton）算子[3]，即满足斜对称条件和Jacobi等式的算子。例如，KdV方程 $u_t+buu_x+u_{xxx}=0$ 可以写成下列广义Hamilton形式

$$u_t=D\frac{\delta}{\delta u}\left(-u^3+\frac{1}{2}u_x^2\right)\qquad D=\frac{d}{dx}\tag{2}$$

此时相应的指标集I只有一个元素，Hamilton算子$H=D$，Hamilton函数$G=-u^3+\frac{1}{2}u_x^2$。除了KdV方程外，还有很多典型的孤立子方程，例如：$MKdV$方程、S-G方程、NLS方程、Boussinesq方程，都具有广义Hamilton形式（1）[4]。

Hamilton算子之研究是广义Hamilton结构研究中的一个方面，其中如何寻求新的

本文1985年8月5日收到。 *我院82级研究生。

Hamilton 算子和算子对是一项较难的课题。Hamilton 算子之研究对了解广义 Hamilton 方程的性质以及构造具有无穷多守恒律的广义 Hamilton 方程族都有着重要的作用。

本文就两类特殊形式的算子讨论了它们的 Hamilton 性，即它们可以成为 Hamilton 算子的充要条件，由此具体构造了若干新的 Hamilton 算子。本文中约定对在和号及等式中出现的指标没有限制时，省略指标范围。

2. 两类特殊形式的关于 ū 线性的哈密尔顿算子

为了叙述方便起见，我们先给出下列定义：

定义 1：如果数组 $\{S_{ij}^k\}=\{S_{ij}^k \mid S_{ij}^k\in\mathscr{C}\quad i、j、k\in I\}$ 对每一 $(i,j)\in I\times I$ 均只有有限个 $k\in I$ 使 S_{ij}^k 非零，则称 $\{S_{ij}^k\}$ 是一个可行数组。又若 $S_{ij}^k\quad i、j、k\in I$ 不全为零，则称 $\{S_{ij}^k\}$ 是非零可行数组。

令 $E=\{e_i \mid i\in I\}$，$X=L_C(E)$ 即 X 是由元素组 E 在复数域 $\mathscr{C}$ 上张成的线性空间。又设 $\{c_{ij}^k\}$ 是一组可行数组，在 E 上定义运算 $\circ$：

$$e_i\circ e_j=\sum_k c_{ij}^k e_k\quad i、j\in I \tag{3}$$

由此运算唯一确定了 X 上的一个双线性二元运算，我们仍用 $\circ$ 表示，这样 $\langle X,\circ\rangle$ 是一个域 $\mathscr{C}$ 上的代数。

定义 2：对按（3）确定运算 $\circ$ 如果 $\exists a、b\in X$，使 $a\circ b\neq 0$，就称 $\circ$ 是非平凡的。

下面给出后面要用到的二种代数的定义：

定义 3：如果运算 $\circ$ 适合条件：(i) $\circ$ 是非平凡的 (ii) $a\circ a=0\ \forall a\in X$ (iii) $(a\circ b)\circ c=0\ \forall a、b、c\in X$，就称 $\langle X,\circ\rangle$ 为二次可交换李代数。

定义 4：如果运算 $\circ$ 适合条件：(i) 是非平凡的 (ii) $(a\circ b)\circ c=0\quad a\circ(b\circ c)=0\ \forall a、b、c\in X$，则称 $\langle X,\circ\rangle$ 为二次积零代数。

考虑如下特殊形式的关于 $\bar{u}$ 线性的算子 H_l^c：

$$(H_l^c)_{ij}=\sum_k c_{ij}^k u_k^{(l)}\quad i、j\in \mathrm{I}\quad l\geqslant 0\quad l\in \mathrm{Z}\ \{c_{ij}^k\}\text{是可行数组} \tag{4}$$

易知它的结构函数组[5] 为

$$\varphi_{ij}^k(\lambda,\mu)=c_{ij}^k(-1)^l(\lambda+\mu)^l\quad i、j、k\in \mathrm{I} \tag{5}$$

当 $l=0$ 时，在文献［3］中已得到了下列结果：

结论 1：H_0^c 为 Hamilton 算子 $\Longleftrightarrow\langle X,\circ\rangle$ 是一个李代数。

下设 $l\geqslant 1$。由（5）易知：$\{\varphi_{ij}^k\}$ 的反称性，即

$$\varphi_{ij}^k(\lambda,\mu)=-\varphi_{ji}^k(\mu,\lambda) \tag{6}$$

成立的充要条件是 $\{c_{ij}^k\}$ 反称，即

$$c_{ij}^k=-c_{ji}^k \tag{7}$$

再考虑等式

$$\sum_a \varphi_{ij}^a(\lambda,\mu)\,\varphi_{ak}^r(\lambda+\mu,\nu)+\left(\text{同时循环}\begin{matrix}i\ j\ k\\ \lambda\ \mu\ \nu\end{matrix}\right)=0 \tag{8}$$

由（5）知（8）即为

$$\sum_{a} c^{a}_{ji}(-1)^{l}(\lambda+\mu)^{l} c^{r}_{ka}(-1)^{l}(\lambda+\mu+\nu)^{l}+\sum_{a} c^{a}_{kj}(-1)^{l}(\mu+\nu)^{l} c^{r}_{ia}(-1)^{l}(\lambda+\mu+\nu)^{l}$$

$$+\sum_{a} c^{a}_{ik}(-1)^{l}(\lambda+\nu)^{l} c^{r}_{ja}(-1)^{l}(\lambda+\mu+\nu)^{l}=0 \tag{9}$$

令

$$c_{r}(i,j,k)=\sum_{a} c^{a}_{ji} c^{r}_{ka} \quad i、j、k、r\in \mathrm{I} \tag{10}$$

在（9）中考虑 $\lambda^{l}(\lambda+\mu+\nu)^{l}$、$\mu^{l}(\lambda+\mu+\nu)^{l}$、$\nu^{l}(\lambda+\mu+\nu)^{l}$ 的系数可得

$$c_{r}(i,j,k)+c_{r}(h,i,j)=0 \quad c_{r}(i,j,k)+c_{r}(j,k,i)=0 \quad c_{r}(j,k,i)+c_{r}(k,i,j)=0$$

由此可得：

$$c_{r}(i,j,k)=0 \quad \forall i、j、k、r\in \mathrm{I} \tag{11}$$

反之一旦有（11）就有（9），因此（8）等价于（11）。

如果 $H^{1}_{l}(l\geqslant 1)$ 非零，即 $\{c^{k}_{ji}\}$ 非零，则运算∘是非平凡的。此时（7）和（11）正好说明 $\langle X,0\rangle$ 是一个二次可交换李代数。又（6）和（8）是 $H^{1}_{l}(l\geqslant 1)$ 为 Hamilton 算子的充要条件[5]，于是我们得到下列结论：

定理 1：非零的关于 $\bar{u}$ 线性的算子 $H^{1}_{l}(l\geqslant 1)$ 为 Hamilton 算子的充要条件是 $\langle X,\circ\rangle$ 为一个二次可交换李代数。

下面考虑另一类特殊形式的关于 $\bar{u}$ 线性的算子 H^{2}_{l}：

$$(H^{2}_{l})_{ij}=\sum_{k} c^{k}_{ji}\left(u^{(l+1)}_{k}+2u^{(l)}_{k}\frac{d}{dx}\right) \quad i、j\in \mathrm{I} \quad l\geqslant 0 \quad l\in \mathrm{Z}\ \{c^{k}_{ji}\}\text{是可行数组} \tag{12}$$

易知它的结构函数组为

$$\varphi^{k}_{ji}(\lambda,\mu)=c^{k}_{ji}(-1)^{l}(\lambda+\mu)^{l}(\lambda-\mu) \quad i、j、k\in \mathrm{I} \tag{13}$$

当 $l=0$ 时，在文献［5］中已得到了下列结果：

结论 2：H^{2}_{0} 为 Hamilton 算子 ⟨=⟩ $\langle X,\circ\rangle$ 是一个交换结合代数。

下设 $l\geqslant 1$，由（13）易知：（6）等价于 $\{c^{k}_{ji}\}$ 对称，即

$$c^{k}_{ij}=c^{k}_{ji} \tag{14}$$

（8）等价于

$$\sum_{a} c^{a}_{ji}(\lambda-\mu)(\lambda+\mu)^{l} c^{r}_{ka}(\lambda+\mu-\nu)(\lambda+\mu+\nu)^{l}$$

$$+\sum_{a} c^{a}_{kj}(\mu-\nu)(\mu+\nu)^{l} c^{r}_{ia}(\mu+\nu-\lambda)(\lambda+\mu+\nu)^{l}$$

$$+\sum_{a} c^{a}_{ik}(\nu-\lambda)(\nu+\lambda)^{l} c^{r}_{ja}(\nu+\lambda-\mu)(\lambda+\mu+\nu)^{l}=0 \tag{15}$$

在（15）中考虑 $\lambda^{l+2}(\lambda+\mu+\nu)^{l}$、$\mu^{l+2}(\lambda+\mu+\nu)^{l}$、$\nu^{l+2}(\lambda+\mu+\nu)^{l}$ 的系数可得

$$c_{r}(i,j,k)=c_{r}(j,k,i)=c_{r}(k,i,j)$$

考虑 $\lambda^{l+1}\mu(\lambda+\mu+\nu)^{l}$ 的系数可得：$l\,c_{r}(i,j,k)+c_{r}(k,i,j)=0$ 于是得到（11）。相反地，一旦有（11）就有（15），因此此时（8）等价于（11）。

同样如果$H_l^2(l\geqslant 1)$非零，即$\{c_{ij}^k\}$非零，则运算$\circ$是非平凡的，此时（14）和（11）正好说明$\langle X,\circ\rangle$是一个二次积零的交换代数。于是同理可得下列结论：

定理 2：非零的关于$\bar{u}$线性的算子$H_l^2(l\geqslant 1)$为Hamilton算子的充要条件是$\langle X,\circ\rangle$为一个二次积零的交换代数。

3. $H_l^1(l\geqslant 0)$和$H_l^2(l\geqslant 0)$与常系数微分算子之和构成的哈密尔顿算子

设常系数矩阵微分算子K：

$$K_{ij}=\sum_m b_{ijm}\left(\frac{d}{dx}\right)^m \quad i、j\in \mathrm{I} \tag{16}$$

其中$b_{ijm}\in\mathscr{C}$ $i、j\in \mathrm{I}$，$m\in \mathrm{Z}$且$m\geqslant 0$，且对每对$(i,j)\in \mathrm{I}\times\mathrm{I}$，$b_{ijm}m\in \mathrm{Z}$且$m\geqslant 0$只有有限个非零。

定理 3：设$H_l^1(l\geqslant 0)$为Hamilton算子，K是由（16）定义的常系数算子，则H_l^1+K $(l\geqslant 0)$为Hamilton算子的充要条件是

$$-b_{ijm}=(-1)^m b_{jim} \quad m\geqslant 0 \tag{17}$$

$$\sum_n c_{ij}^n b_{nkm}+(\text{循环}i,j,k)=0 \quad m+l=0 \quad m\geqslant 0 \tag{18a}$$

$$\sum_n c_{ij}^n b_{nkm}=\sum_n c_{jk}^n b_{nim} \qquad m+l=1 \quad m\geqslant 0 \tag{18b}$$

$$\sum_n c_{ij}^n b_{nkm}=0 \qquad m+l\geqslant 2 \quad m\geqslant 0 \tag{18c}$$

证明：我们考虑如下二个等式（见文献[5]）

$$\langle e_{i\lambda}、e_{j\mu}\rangle=-\langle e_{j\mu}、e_{i\lambda}\rangle \tag{19}$$

$$\langle[e_{i\lambda},e_{j\mu}],e_{k\nu}\rangle+\left(\text{同时循环}\begin{matrix}i\ j\ k\\ \lambda\ \mu\ \nu\end{matrix}\right)=0 \quad \lambda+\mu+\nu=0 \tag{20}$$

易知：（19）等价于（17），下面考虑（20）。设$\lambda+\mu+\nu=0$，由（5）得：

$$\langle[e_{i\lambda},e_{j\mu}],e_{k\nu}\rangle=\left\langle\sum_n\langle(-1)^l c_{ji}^n(\lambda+\mu)^l e_{n,\lambda+\mu},\ l_{k\nu}\right\rangle$$

$$=(-1)^l(\lambda+\mu)^l\sum_n c_{ji}^n\langle e_{n,\lambda+\mu},e_{k\nu}\rangle=(-1)^l(\lambda+\mu)^l\sum_n c_{ji}^n b_{nk}(\nu)$$

$$=(-1)^l(\lambda+\mu)^l\sum_m\left(\sum_n c_{ji}^n b_{nkm}\right)\nu^m$$

令

$$b_m(i,j,k)=\sum_n c_{ji}^n b_{nkm} \quad i、j、k\in \mathrm{I} \quad m\geqslant 0 \tag{21}$$

由上式得：

$$\langle[e_{i\lambda},e_{j\mu}],e_{k\nu}\rangle+\left(\text{同时循环}\begin{matrix}i&j&k\\ \lambda&\mu&\nu\end{matrix}\right)=(-1)^l(\lambda+\mu)^l\sum_m b_m(i,j,k)\nu^m$$

$$+(-1)^l(\mu+\nu)^l\sum_m b_m(j,k,i)\lambda^m+(-1)^l(\nu+\lambda)^l\sum_m b_m(k,i,j)\mu^m$$

$$=\sum_m(-1)^{m+l}b_m(i,j,k)(\lambda+\mu)^{m+l}+\sum_m b_m(j,k,i)\lambda^{m+l}+\sum_m b_m(k,i,j)\mu^{m+l}$$

因此条件（20）等价于：

$$\sum_m[(-1)^{m+l}b_m(i,j,k)(\lambda+\mu)^{m+l}+b_m(j,k,i)\lambda^{m+l}+b_m(k,i,j)\mu^{m+l}]=0$$

因上式和号中每一项是 $m+l$ 齐次二元多项式，故上式等价于：

$$(-1)^{m+l}b_m(i,j,k)(\lambda+\mu)^{m+l}+b_m(j,k,i)\lambda^{m+l}+b_m(k,i,j)\mu^{m+l}=0\quad m\geqslant 0\qquad(22)$$

如果 $m\geqslant 0$ 且 $m+l=0$，则（22）为

$b_m(i,j,k)+(\text{循环}\,i,j,k)=0$　此式等价于(18a)。

如果 $m\geqslant 0$ 且 $m+l=1$，则（22）为

$$-b_m(i,j,k)(\lambda+\mu)+b_m(j,k,i)\lambda+b_m(k,i,j)\mu=0$$
$$\Longleftrightarrow b_m(i,j,k)=b_m(j,k,i)\Longleftrightarrow(18b)$$

如果 $m\geqslant 0$ 且 $m+l\geqslant 2$，在（22）中，考虑 $\lambda^{m+l-1}\mu$ 的系数可得：$b_m(i,j,k)=0$；反之一旦有这个条件，很明显等式（22）就成立。又 $b_m(i,j,k)=0$ 等价于（18c），故此时(22)等价于（18c）。

综上所述（22）等价于（18a—c）。于是（19）、（20）等价于（17）、（18a—c）。又（19）、（20）是 $H_l^1+K(\ l\geqslant 0)$ 为 Hamilton 算子的充要条件[6]，故定理结论为真。 #

当 $l=0$ 时，由上述定理就可得到：

推论 1：设 H_0^1 为 Hamilton 算子，K 是由（16）定义的常系数算子，则 H_0^1+K 为 Hamilton 算子$\Longleftrightarrow$等式（17）成立，且

$$\sum_n c_{ij}^n b_{nk0}+(\text{循环}\ i,j,k)=0\qquad(23a)$$

$$\sum_n c_{ij}^n b_{nk1}=\sum_n c_{jk}^n b_{ni1}\qquad(23b)$$

$$\sum_n c_{ij}^n b_{nkm}=0\quad m\geqslant 2\qquad(23c)$$

定理 4：设 $H_l^2(l\geqslant 0)$ 为 Hamilton 算子，K 是由（16）定义的常系数算子，则 H_l^2+K（$l\geqslant 0$）为 Hamilton 算子的充要条件是等式（17）成立，且

$$\sum_n c_{ij}^n b_{nkm}=\sum_n c_{jk}^n b_{nim}\quad 0\leqslant m+l\leqslant 1\ \ m\geqslant 0\ \text{或}\ m+l=3\ \ m\geqslant 0\qquad(24a)$$

$$\sum_n c_{ij}^n b_{nkm}=0\quad m+l=2\ \ m\geqslant 0\ \text{或}\ m+l\geqslant 4\ \ m\geqslant 0\qquad(24b)$$

证明：考虑等式（20）。设 $\lambda+\mu+\nu=0$，由（13）得

$$\langle [e_{i\lambda}, e_{j\mu}], e_{k\nu}\rangle = \left\langle \sum_n (-1)^l c_{ji}^n (\lambda-\mu)(\lambda+\mu)^l e_{n,\lambda+\mu}, e_{k\nu}\right\rangle$$

$$= (-1)^l(\lambda-\mu)(\lambda+\mu)^l \sum_n c_{ji}^n \langle e_{n\cdot\lambda+\mu}, e_{k\nu}\rangle = (-1)^l(\lambda-\mu)(\lambda+\mu)^l \sum_n c_{ji}^n b_{nk}(\nu)$$

$$= (-1)^l(\lambda-\mu)(\lambda+\mu)^l \sum_m \Big(\sum_n c_{ji}^n b_{nkm}\Big)\nu^m = (-1)^l(\lambda-\mu)(\lambda+\mu)^l \sum_m b_m(i,j,k)\nu^m$$

从而

$$\langle [e_{i\lambda}, e_{j\mu}], e_{k\nu}\rangle + (\text{循环}\, i,j,k) = (-1)^l(\lambda-\mu)(\lambda+\mu)^l \sum_m b_m(i,j,k)\nu^m$$

$$+ (-1)^l(\mu-\nu)(\mu+\nu)^l \sum_m b_m(j,k,i)\lambda^m + (-1)^l(\nu-\lambda)(\nu+\lambda)^l \sum_m b_m(k,i,j)\mu^m$$

$$= \sum_m (-1)^{m+l} b_m(i,j,k)(\lambda-\mu)(\lambda+\mu)^{m+l} + \sum_m b_m(j,k,i)(2\mu+\lambda)\lambda^{m+l}$$

$$+ \sum_m b_m(k,i,j)(-2\lambda-\mu)\mu^{m+l}$$

这样（20）等价于

$$\sum_m [(-1)^{m+l} b_m(i,j,k)(\lambda-\mu)(\lambda+\mu)^{m+l} + b_m(j,k,i)(2\mu+\lambda)\lambda^{m+l}$$

$$+ b_m(k,i,j)(-2\lambda-\mu)\mu^{m+l}] = 0$$

因上式和号中每一项是 $m+l+1$ 齐次二元多项式，故上式等价于

$$(-1)^{m+l} b_m(i,j,k)(\lambda-\mu)(\lambda+\mu)^{m+l} + b_m(j,k,i)(2\mu+\lambda)\lambda^{m+l}$$

$$+ b_m(k,i,j)(-2\lambda-\mu)\mu^{m+l} = 0 \quad m \geqslant 0 \tag{25}$$

如果 $m\geqslant 0$ 且 $m+l=0$，则（25）为

$$b_m(i,j,k)(\lambda-\mu) + b_m(j,k,i)(2\mu+\lambda) + b_m(k,i,j)(-2\lambda-\mu) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} b_m(i,j,k) + b_m(j,k,i) - 2b_m(k,i,j) = 0 \\ -b_m(i,j,k) + 2b_m(j,k,i) - b_m(k,i,j) = 0 \end{cases}$$

前式减去后式的 2 倍得：

$$3b_m(i,j,k) - 3b_m(j,k,i) = 0$$

即 $b_m(i,j,k) = b_m(j,k,i)$ 反之一旦有这个条件显然就有上面二式，而这个条件等价于（24a），因此这时（25）等价于（24a）。

如果 $m\geqslant 0$ 且 $m+l=1$，则（25)为

$$-b_m(i,j,k)(\lambda-\mu)(\lambda+\mu) + b_m(j,k,i)(2\mu+\lambda)\lambda + b_m(k,i,j)(-2\lambda-\mu)\mu = 0$$

考虑 λ^2 的系数得：$b_m(i,j,k) = b_m(j,k,i)$。反之一旦有这个条件，易知有上式成立，因而这时（25）等价于（24a)。

如果 $m\geqslant 0$ 且 $m+l=2$，则（25）为

$$b_m(i,j,k)(\lambda-\mu)(\lambda+\mu)^2 + b_m(j,k,i)(2\mu+\lambda)\lambda^2 + b_m(k,i,j)(-2\lambda-\mu)\mu^2 = 0$$

考虑 λ^3 和 $\lambda^2\mu$ 的系数得：

$$b_m(i,j,k) + b_m(j,k,i) = 0 \quad b_m(i,j,k) + 2b_m(j,k,i) = 0$$

$\Rightarrow b_m(i,j,k)=0$ 反之一旦有这个条件很明显就有上面（25）的特殊式。又 $b_m(i,j,k)=0$ 等价于（$24b$），故这时（25）等价于（$24b$）。

如果 $m\geqslant 0$ 且 $m+l=3$，则（25）为

$$-b_m(i,j,k)(\lambda-\mu)(\lambda+\mu)^3+b_m(j,k,i)(2\mu+\lambda)\lambda^3+b_m(k,i,j)(-2\lambda-\mu)\mu^3=0$$

考虑 λ^4 的系数得：$b_m(i,j,k)=b_m(j,k,i)$ 反之当有这个条件时，可以推出上式，因此这时（25）等价于（$24a$）。

如果 $m\geqslant 0$ 且 $m+l\geqslant 4$，则 $\lambda^2\mu^{(m+l)-1}$ 在(25)中出现且只在(25)的第一项中出现。又

$$(\lambda-\mu)(\lambda+\mu)^{m+l}=(\lambda-\mu)\sum_{q=0}^{m+l}\binom{m+l}{q}\lambda^q\mu^{(m+l)-q}=\sum_{q=0}^{m+l}\binom{m+l}{q}(\lambda^{q+1}\mu^{(m+l)-q}-\lambda^q\mu^{(m+l)-q+1})$$

$$=\sum_{q=1}^{m+l+1}\binom{m+1}{q-1}\lambda^q\mu^{(m+l)-q+1}-\sum_{q=0}^{m+l}\binom{m+l}{q}\lambda^q\mu^{(m+l)-q+1}$$

$$=-\mu^{(m+l)+1}+\sum_{q=1}^{m+l}\left[\binom{m+l}{q-1}-\binom{m+l}{q}\right]\lambda^q\mu^{(m+l)-q+1}+\lambda^{(m+l)+1}$$

故令 $\lambda^2\mu^{(m+l)-1}$ 的系数为零得

$$(-1)^{m+l}b_m(i,j,k)\left[\binom{m+l}{1}-\binom{m+l}{2}\right]=0$$

这里

$$\binom{m+l}{1}-\binom{m+l}{2}=(m+l)-\frac{1}{2}(m+l)(m+l-1)=\frac{1}{2}(m+l)[3-(m+l)]<0$$

因此 $b^m(i,j,k)=0$ 反之一旦有这个条件(25)自然成立。因此这时等式(25)等价于($24b$)。

综上所述（20）等价于（$24a-b$），余同定理3。所以定理4的结论为真。 #

当 $l=0$ 时，我们从上述定理可以得到：

推论 2：设 H_0^2 为Hamilton算子，K 是由（16）定义的常系数算子，则 H_0^2+K 为Homilton算子⟨⟹⟩等式（17）成立，且

$$\sum_n c_{ij}^n b_{nkm}=\sum_n c_{jk}^n b_{nim}\quad m=0,1,3 \tag{26a}$$

$$\sum_n c_{ij}^n b_{nkm}=0\quad m=2,\ m\geqslant 4 \tag{26b}$$

4. 若 干 例 子

例 1. 设 $I=\{0\}$ 并把 u_0 看成 u。令

$$H=A_3\left(u'+2u\frac{d}{dx}\right)\quad u'=\frac{d}{dx}u\quad K=A_1\left(\frac{d}{dx}\right)^3+2A_2\frac{d}{dx}$$

其中 $A_i\in\mathscr{C}$ $1\leqslant i\leqslant 3$ 是任意的常数。由推论2易知：H 是一个Hamilton算子。等式(17)

和（26a）显然成立。因而由推论2得

$$H+K=A_1\left(\frac{d}{dx}\right)^3+2(A_2+A_3u)\frac{d}{dx}+A_3u'$$

是一个 Hamilton 算子。由此还可知：

$$H_1=B_1\left(\frac{d}{dx}\right)^3+2(B_2+B_3u)\frac{d}{dx}+B_3u' \text{ 和 } H_2=2(c_1+c_2u)\frac{d}{dx}+c_2u',$$

其中 $B_i\in\mathscr{C}\ 1\leqslant i\leqslant 3$ $c_i\in\mathscr{C}\ 1\leqslant i\leqslant 2$ 是任意的常数，是 Hamilton 对[3]。这个 Hamilton 对在文献[6]中研究过。

例 2：考虑文献[7]中的算子 J 和 L：

$$J=\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ -2 & -D & 2u\\ 0 & -2u & D\end{bmatrix}\quad L=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}D^2-uIu_x-2uIv+u^2+S & -\frac{1}{2}DS+2uI\,Su & -\frac{1}{2}Dv+2uIuv\\ \frac{1}{2}D & S & v\\ u-Iu_x-2Iv & 2IuS & 2Iuv\end{bmatrix}$$

其中

$$D=\frac{d}{dx}$$

易知 $JL=\begin{vmatrix}D & 2S & 2v\\ -2S & 0 & 0\\ -2v & 0 & 0\end{vmatrix}$ 于是 $\alpha J+\beta JL=\begin{vmatrix}\beta D & 2\beta S+2\alpha & 2\beta v\\ -2\beta s-2\alpha & -2D & 2\alpha u\\ -2\beta v & -2\alpha u & \alpha D\end{vmatrix}$ α、$\beta\in\mathscr{C}$ 任意

令 $H=\begin{vmatrix}0 & 2\beta S & 2\beta v\\ -2\beta S & 0 & 2\alpha u\\ -\beta v & -2\alpha u & 0\end{vmatrix}$ $K=\begin{vmatrix}\beta D & 2\alpha & 0\\ -2\alpha & -\alpha D & 0\\ 0 & 0 & \alpha D\end{vmatrix}$ 则 $\alpha J+\beta JL=H+K$

易得

$$B^0=(b_{ij_0})_{3\times 3}=\begin{vmatrix}0 & 2\alpha & 0\\ -2\alpha & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}\quad B^1=(b_{ij1})_{3\times 3}=\begin{vmatrix}\beta & 0 & 0\\ 0 & -\alpha & 0\\ 0 & 0 & \alpha\end{vmatrix}$$

令 $(u_0,u_1,u_2)=(u,v,S)$ 则

$$c^0=(c^0_{ij})_{3\times 3}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\alpha\\ 0 & -2\alpha & 0\end{vmatrix}\quad c^1=(c^1_{ij})_{3\times 3}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 2\beta\\ 0 & 0 & 0\\ -2\beta & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$c^2=(c^2_{ij})_{3\times 3}=\begin{vmatrix}0 & 2\beta & 0\\ -2\beta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

不难证明此时 $\langle X,\circ\rangle$ 是一个李代数，由结论 1 知 H 是一个 Hamilton 算子。由 B^0、B^1 易知等式(17)成立，对等式（23a—b）也不难验证。于是由推论 1 知：$\alpha J+\beta JL$ 是 Hamilton 算子，从而 J、JL 是 Hamilton 对。

例 3：取 $I=\{0,1,\cdots,p\}$ $p\geqslant 1$，在 $X=L_C(E)$ 上定义双线性二元运算。如下

$$
\begin{array}{c|ccccc}
\circ & e_0 & e_1 & \cdots & e_{p-1} & e_p \\
\hline
e_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_0e_0 \\
e_1 & 0 & 0 & \cdots & c_0e_0 & c_0e_1 \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
e_{p-1} & 0 & c_0e_0 & \cdots & c_0e_{p-2} & c_0e_{p-1} \\
e_p & c_0e_0 & c_0e_1 & \cdots & c_0e_{p-1} & c_0e_p
\end{array}
$$

其中 $c_0\in\mathscr{C}$ 是任意的常数

易得关于基 $\{e_0,e_1,\cdots,e_p\}$ 的结构常数组为

$$c_{ij}^k=\delta_{i+j,p+k}c_0 \quad i、j、k\in \mathrm{I} \tag{27}$$

由（27）知有（14），故 $\langle X,\circ\rangle$ 是一个交换代数，由（27）还容易证明

$$\sum_n c_{ij}^n c_{nk}^l=\begin{cases} c_0^2, & \text{当 } i+j+k=2p+l \text{ 时；} \\ 0, & \text{当 } i+j+k\neq 2p+l \text{ 时。}\end{cases} \tag{28}$$

由（14）和（28）易知 $\langle X,\circ\rangle$ 是一个结合代数，因此 $\langle X,\circ\rangle$ 是一个交换结合代数，从而由结论 2 知相应的算子 H：

$$H=\begin{pmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & c_0(u'_0+2u_0D) \\
0 & 0 & \cdots & c_0(u'_0+2u_0D) & c_0(u'_1+2u_1D) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & c_0(u'_0+2u_0D) & \cdots & c_0(u'_{p-2}+2u_{p-2}D) & c_0(u'_{p-1}+2u_{p-1}D) \\
c_0(u'_0+2u_0D) & c_0(u'_1+2u_1D) & \cdots & c_0(u'_{p-1}+2u_{p-1}D) & c_0(u'_p+2u_pD)
\end{pmatrix}$$

是 Hamilton 算子。

容易证明当

$$B=(b_{ij})_{(p+1)\times(p+1)}=\begin{pmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & B_1 \\
0 & 0 & \cdots & B_1 & B_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & B_1 & \cdots & B_{p-1} & B_p \\
B_1 & B_2 & \cdots & B_p & B_{p+1}
\end{pmatrix} \quad (i,j\in \mathrm{I}，B_k\in\mathscr{C} \ \ 1\leqslant k\leqslant p+1 \text{任意})$$

时，有下列等式

$$\sum_n c_{ij}^n b_{nk}=\begin{cases} c_0B_{l+1}, & \text{当 } \exists l\in \mathrm{I} \text{ 使 } i+j+k=2p+l \text{ 时；} \\ 0, & \text{当 } i+j+k\neq 2p+l \text{ 时。}\end{cases} \tag{29}$$

由此（29）知

$$\sum_n c^n_{ij} b_{nk} = \sum_n c^n_{jk} b_{ni}$$

$$于是令 K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & \cdots & c_1 & c_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & c_1 & \cdots & c_{2p-3} & c_{2p-1} \\ c_1 & c_3 & \cdots & c_{2p-1} & c_{2p+1} \end{pmatrix} D + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & \cdots & c_2 & c_4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & c_2 & \cdots & c_{2p-2} & c_{2p} \\ c_2 & c_4 & \cdots & c_{2p} & c_{2p+2} \end{pmatrix} D^3$$

其中 $c_i \in \mathscr{C}$ $1 \leqslant i \leqslant 2p+2$ 是任意的常数。

由推论 2 知下列算子

$$H + K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & c_0(u'_0 + 2u_0 D) + c_1 D + c_2 D^3 \\ 0 & 0 & \cdots & c_0(u'_0 + 2u_0 D) + c_1 D + c_2 D^3 & c_0(u'_1 + 2u_1 D) + c_3 D + c_4 D^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & c_0(u'_0 + 2u_0 D) + c_1 D + c_2 D^3 & \cdots & c_0(u'_{p-2} + 2u_{p-2} D) + c_{2p-3} D + c_{2p-2} D^3 & c_0(u'_{p-1} + 2u_{p-1} D) + c_{2p-1} D + c_{2p} D^3 \\ c_0(u'_0 + 2u_0 D) + c_1 D + c_2 D^3 & c_0(u'_1 + 2u_1 D) + c_3 D + c_4 D^3 & \cdots & c_0(u'_{p-1} + 2u_{p-1} D) + c_{2p-1} D + c_{2p} D^3 & c_0(u'_p + 2u_p D) + c_{2p+1} D + c_{2p+2} D^3 \end{pmatrix}$$

其中 $c_i \in \mathscr{C}$ $0 \leqslant i \leqslant 2p+2$ 是任意的常数。

是 Hamilton 算子。

特别地，下列二个算子

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} u'_0 + u_0 D \\ \frac{1}{2} u'_0 + u_0 D & \frac{1}{2} u'_1 + u_1 D - \frac{1}{4} D^3 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} u'_0 + u_0 D \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} u'_0 + u_0 D & \frac{1}{2} u'_1 + u_1 D \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2} u'_0 + u_0 D & \cdots & \frac{1}{2} u'_{p-2} + u_{p-2} D & \frac{1}{2} u'_{p-1} + u_{p-1} D \\ \frac{1}{2} u'_1 + u_0 D & \frac{1}{2} u'_1 + u_1 D & \cdots & \frac{1}{2} u'_{p-1} + u_{p-1} D & \frac{1}{2} u'_p + u_p D - \frac{1}{4} D^3 \end{pmatrix} \quad P \geqslant 2$$

是 Hamilton 算子。H_1、H_2 分别在文献［8］、［9］中讨论过。

例 4：取 $I=\{0,1,\cdots,p\}$ $p\geqslant 1$，$c_{ij}^{k}=A_0$ $i、j、k\in \mathrm{I}$ $A_0\in\mathscr{C}$ 任意

由结论 2 易知相应的算子 H：

$$H_{ij}=\sum_{k=0}^{p}A_0\left(u'_k+2u_k\frac{d}{dx}\right)\quad i、j\in \mathrm{I}$$

是 Hamilton 算子。

令
$$B^{(1)}=\{B=(b_{ij})_{(p+1)\times(p+1)}\mid B^T=-B\ \text{且各列元素之和彼此相等}\}$$
$$B^{(2)}=\{B=(b_{ij})_{(p+1)\times(p+1)}\mid B^T=B\ \text{且各列元素之和彼此相等}\}$$
$$B^{(3)}=\{B=(b_{ij})_{(p+1)\times(p+1)}\mid B^T=-B\ \text{且每列元素之和为零}\}$$
$$B^{(4)}=\{B=(b_{ij})_{(p+1)\times(p+1)}\mid B^T=B\ \text{且每列元素之和为零}\}$$

并设

$$B^0\in B^{(1)},\ B^1\in B^{(2)},\ B^2\in B^{(3)},\ B^3\in B^{(2)},\ B^{2r+2}\in B^{(3)};\ B^{2r+3}\in B^{(4)}\quad r\geqslant 1$$

$$K=\sum_{i=0}^{s}B^iD^i\quad S\geqslant 0,$$

则由推论已知：$H+K$ 是 Hamilton 算子。

特别当 $p=1$ 时，取

$$K=\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ B_1 & A_1\end{vmatrix}D+\begin{vmatrix}A_2 & B_2\\ B_2 & A_2\end{vmatrix}D^3+\sum_{r=1}^{s}c_r\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}D^{2r+3}\quad S\geqslant 1$$

其中 $A_1、A_2、B_1、B_2\in\mathscr{C}$ $c_r\in\mathscr{C}$ $1\leqslant r\leqslant s$ 是任意的常数。则 $H+K$ 是 Hamilton 算子。

当 $p=2$ 时，取 K 为如下形式的算子：

$$K=\begin{vmatrix}A_1+A_4 & A_2 & A_3\\ A_2 & A_1+A_3 & A_4\\ A_3 & A_4 & A_1+A_2\end{vmatrix}D+\begin{vmatrix}A_5+A_8 & A_6 & A_7\\ A_6 & A_5+A_7 & A_8\\ A_7 & A_8 & A_5+A_6\end{vmatrix}D^3+$$

$$+\sum_{r=0}^{s}B_r\begin{vmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}D^{2r}+\sum_{r=1}^{t}\begin{vmatrix}c_{1r}+c_{2r} & -c_{1r} & -c_{2r}\\ -c_{1r} & c_{1r}+c_{3r} & -c_{3r}\\ -c_{2r} & -c_{3r} & c_{2r}+c_{3r}\end{vmatrix}D^{2r+3}$$

$$s\geqslant 0\ t\geqslant 1$$

其中

$$A_i\in\mathscr{C}\quad 1\leqslant i\leqslant 8\quad B_r\in\mathscr{C}\quad 0\leqslant r\leqslant S\quad C_{ir}\in\mathscr{C}\quad 1\leqslant i\leqslant 3\quad 1\leqslant r\leqslant t$$

则 $H+K$ 是 Hamilton 算子。

本文是作者的硕士论文《非线性演化方程的广义哈密尔顿结构之研究》的一部份。文中出现的二次可交换李代数和二次积零代数的存在性和构造，在作者的硕士论文中也有讨论。

作者对导师屠规彰教授的悉心指点表示衷心的谢意。

参 考 文 献

[1] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, Phys. Rev. Lett., 15, (1965) 240—249.
[2] 世界科学, 3 (1984) 22—24.
[3] И. М. Гельфанд, И. Я. Дорфман, Функц. анализ, Т. 13, ВЫП. 4, (1979) 13—30.
[4] Lax P. D., in Nonlinear evolution equation ed. M. G. Crandall, New York (1979), 207.
[5] И. М. Гельфанд, И. Я. Дорфман, Функц. анализ. Т. 15, ВЫП. 3, (1981) 23—40.
[6] Гельфанд И. Н., Дорфман И. Я., Интегрируемые уравнения Типа КдФ-Г. Дима, в сь. 《Современные Проблемы вычислительной математики и математической физики》, М., 1979.
[7] M. Boiti and G. Z. Tu, Il Nuovo Cimento, V. 75B, No. 2, (1983) 145.
[8] G. Z. Tu, Il Nuovo Cimento, Vol. 73B, No. 1. (1983) 15.
[9] M. Boiti, C. Laddomada, F. Pempinelli and G. Z. Tu, J. Math. Phys., Vol. 24, No. 8, (1983) 2035.

ON THE TWO SORTS OF HAMILTONIAN OPERATORS

Ma Wen-xiu

(Shanghai jiaotong University)

ABSTRACT

In this paper we suudy two sorts of operators with special form H_l^1 $(l\geqslant 0)$、H_l^2 $(l\geqslant 0)$, and consider the sum operators H_l^1+K $(l\geqslant 0)$、H_l^2+K $(l\geqslant 0)$, where K is an operator with constant coefficients. Then we find out the necessary and sufficient conditions for them to be Hamiltonian operators. From these conditions we propose several examples, thus we generate some Hamiltonian operators, which include two operators given in literature [8,9].