

具有 Lenard 递推结构之发展方程族的 Lax 表示

马 文 秀

(复旦大学数学研究所 上海 200433)

摘 要 该文对具有 Lenard 递推结构的发展方程族, 通过转换递推结构为一个算子方程给出了 Lax 表示的一种理论描述. 这种描述可应用于各种 1+1 维可积系统族 Lax 表示的寻求之中, 本文仅就 KdV 可积族和 Antonowicz-Fordy 可积族详细阐述了 Lax 表示的具体构造过程.

关键词 可积族, 特征算子方程, Lax 表示.

1 引 言

Lax^[1]首先提出了非线性系统的一种换位形式, 即所谓的 Lax 方程. 之后的研究已表明在这种 Lax 方程的基础上可得到非线性系统的许多可积性质, 例如可生成非线性系统的一串守恒律. 在有限维系统情形, 基于所得的守恒律常可表明非线性系统的完全可积性^[2,3]. 在本文中我们考虑发展方程情形.

下面先说明基本符号:

设 $x = (x^1, \dots, x^p)^T \in \mathbb{R}^p, t \in \mathbb{R}, u = (u^1, \dots, u^q)^T, u^i = u^i(x, t), 1 \leq i \leq q$. 对 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p), \alpha_i \geq 0, \alpha_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq p$, 记 $|\alpha| = \sum_{i=1}^p \alpha_i, D^\alpha = (\frac{d}{dx^1})^{\alpha_1} \cdots (\frac{d}{dx^p})^{\alpha_p}, \frac{d}{dx^i}$ 表示关于 x^i 的全导数, $1 \leq i \leq p, u_\alpha = (u_\alpha^1, \dots, u_\alpha^q)^T = (D^\alpha u^1, \dots, D^\alpha u^q)^T$. 形如 $P[u] = P(x, t, u) = P(x, t, u, \dots, u_\alpha)$ 的复值(或实值)光滑函数全体记为 $\mathcal{A}$, 而 $\mathcal{A}^r = \{(P_1, \dots, P_r)^T | P_i \in \mathcal{A}, 1 \leq i \leq r\}$. $\mathcal{U}$ 表示对依赖变量 $x, t, u, \dots, u_\alpha$ C^∞ 可微的线性算子 $\Phi = \Phi(u) = \Phi(x, t, u) = \Phi(x, t, u, \dots, u_\alpha): \mathcal{A}^r \rightarrow \mathcal{A}^r$ 的全体, 用 $\mathcal{U}_0$ 表示具有如下形式

$$L = (L_{ij})_{r \times r}, L_{ij} = \sum_{|\alpha| \leq \sigma(i, j)} P_{ij}^\alpha[u] D^\alpha, P_{ij}^\alpha[u] = P_{ij}^\alpha(x, t, u) \in \mathcal{A} \quad (1.1)$$

的矩阵微分算子 $L = L(u) = L(x, t, u): \mathcal{A}^r \rightarrow \mathcal{A}^r$ 的全体, 自然 $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$. 这里的某些符号可参见文献[4].

设微分算子 $L = L(u) = L(x, t, u) \in \mathcal{U}_0$, 算子 $A = A(u) = A(x, t, u) \in \mathcal{U}^r$, 我们知道下列 Lax 系统

$$\begin{cases} L(u)\psi = \lambda\psi, \lambda \text{ 是谱参数,} \end{cases} \quad (1.2a)$$

$$\begin{cases} \phi_t = A(u)\phi \end{cases} \quad (1.2b)$$

的等谱方程必然具有 Lax 方程形式

$$\frac{dL}{dt} = [A, L], \quad (1.3)$$

这里 $\frac{d}{dt}$ 表示关于 t 的全导数, $[\cdot, \cdot]$ 表示算子李代数 $\mathcal{U}'$ 的换位子. 相反地当位势向量 u 满足上述方程时, 如果谱算子 L 对称, 则特征值问题 (1.2a) 的谱不随时间而改变^[5], KdV 方程情形就是一个例子. 我们也容易证明当位势向量 u 满足 Lax 方程 (1.3), 并且特征值问题 (1.2a) 的特征函数向量按 (1.2b) 演化, 则相应的特征值问题 (1.2a) 是等谱的.

对一个给定的发展方程

$$u_t = K = K(x, t, u), \quad K = K(x, t, u) \in \mathcal{A}^q, \quad (1.4)$$

如果存在算子 $L = L(x, t, u) \in \mathcal{U}'_0$ 和 $A = A(x, t, u) \in \mathcal{U}'$, 使发展方程 (1.4) 等价于 Lax 方程 (1.3), 我们就称发展方程 (1.4) 具有 Lax 表示 (也称对易表示或换位表示) $\frac{dL}{dt} = [A, L]$, 而 L, A 称为此发展方程的一个 Lax 对. 我们知道: 基于发展方程的 Lax 系统 (1.2), 通常可用反散射方法精确求解, 因此寻求发展方程的 Lax 表示是利用反射方法求解所必须的关键步骤. Lax 表示还有其它应用, 譬如生成可积系统, 计算有限带势情形的 Baker 函数的 Riemann 面^[6]等.

曹策问^[7]提出了单个发展方程具有 Lax 表示的一个理论描述. 在下一节我们利用这种思想, 对具有 Lenard 递推结构的发展方程族 (见第二节) 建议了其 Lax 表示的一个一般性框架. 我们的框架包括多个空间变量 ($p > 1$) 和多个位势 ($q > 1$) 的情形, 特别适合于 $1+1$ 维的可积族, 在第三节, 我们把一般方法应用到 KdV 方程族和 Antonowicz—Fordy 方程族^[8], 详细阐述了这二种方程族 Lax 表示的构造过程.

2 方程族 Lax 表示的一般框架

本节我们对具有 Lenard 递推结构的发展方程族给出其 Lax 表示的一个一般的理论框架. 为按我们框架描述发展方程的 Lax 表示, 需要明确算子的一种 Gateaux 导数的概念.

定义 2.1 设算子 $\Phi = \Phi(u) \in \mathcal{U}'$, 定义 Φ 关于 u 在方向 $S \in \mathcal{A}^q$ 上的 Gateaux 导数 $\Phi'[S] = \Phi'(u)[S]: \mathcal{A}^q \rightarrow \mathcal{A}^q$ 如下:

$$\Phi'[S]T = \Phi'(u)[S]T = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \Phi(u + \epsilon S)T|_{\epsilon=0}, \quad T \in \mathcal{A}^r. \quad (2.1)$$

对 $\mathcal{U}'_0$ 中的算子 L 我们通过直接计算即可表明下列结论.

命题 2.1 设 $L = L(u) \in \mathcal{U}'_0$. 由 (1.1) 定义, 则我们有

$$(1) \quad \frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + L'[u_t]; \quad (2.2)$$

(2) L 的 Gateaux 导数 $L': S \rightarrow L'[S] (S \in \mathcal{A}^q)$ 为

$$L'[S] = (L'_{ij}[S])_{r \times r}, \quad L'_{ij}[S] = \sum_{|s| \leq \sigma(i,j)} \text{pr} S(P_s^{ij}) D^s, \quad (2.3)$$

这里 $\text{pr} S$ 是一种 Lie—Bäcklund 算子^[9,4]:

$$\text{pr} S = \sum_{s,j} (D^s S_j) \frac{\partial}{\partial u_s^j}, \quad S = (S_1, \dots, S_q)^T \in \mathcal{A}^q. \quad (2.4)$$

因而 Gateaux 导数 $L': S \rightarrow L'[S] (S \in \mathcal{A}^q)$ 是线性的, 即

$$L'[aS + bT] = aL'[S] + bL'[T], \quad a, b \in \mathbb{C}, S, T \in \mathcal{A}^q. \quad (2.5)$$

利用上述命题容易证得如下一个基本结果.

命题 2.2 设 $L = L(x, t, u) \in \mathcal{U}'_0, K = K(x, t, u) \in \mathcal{A}^q$. 如果 Gateaux 导数 $L': S \rightarrow$

$L'[S]$ ($S \in \mathcal{A}^q$ 为单线性同态, 且存在一个微分算子 $A = A(x, t, u) \in \mathcal{U}'$ 满足 $[A, L] = \frac{\partial L}{\partial t} + L'[K]$), 则发展方程 (1.4) 具有 Lax 表示 $\frac{dL}{dt} = [A, L]$.

下面将看到我们的一般框架是以此命题为基础的, 当 $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ 时命题 2.2 即是文献 [7] 中的一个主要结果.

考虑下列具有 Lenard 递推结构的发展方程族:

$$u_t = X_0 = JG_0, \quad u_t = X_n = JG_n = MG_{n-1}, \quad n \geq 1, \quad (2.6)$$

这里 Lenard 算子对 $J = J(x, t, u)$, $M = M(x, t, u) \in \mathcal{U}'$, G 向量场 $G_n = G_n(x, t, u) \in \mathcal{A}^q$, $n \geq 0$. 许多可积分方程族都可表示成这种形式^[10,11], 而且 J, M 常构成一个 Hamilton 算子对, 设 $L = L(u) = L(x, t, u) \in \mathcal{U}'_0$, 对任一 $Y = Y(x, t, u) \in \mathcal{A}^q$ 相应于上述 Lenard 算子对 J, M 可生成关于算子 $V = V(x, t, u) \in \mathcal{U}'$ 的算子方程

$$[V, L] = L'[MY] - L'[JY]L + \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial t}L, \quad (2.7)$$

其中 $[\cdot, \cdot]$ 是 $\mathcal{U}'$ 的换位子, L' 是由 (2.1) 定义的 Gateaux 导数. 我们称 (2.7) 为特征算子方程, 并记 (2.7) 相应于 $Y \in \mathcal{A}^q$ 的算子解为 $V = V(Y)$. 下面我们通过二条定理给出发展方程族 (2.6) 的 Lax 表示与特征算子方程 (2.7) 的算子解二者之间的密切关系.

定理 2.1 设 $L = L(x, t, u) \in \mathcal{U}'_0$, $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ 和 $\{G_n\}_{n=0}^\infty$ 由 (2.6) 确定, 并假定 (1) 存在一个算子 $V_0 = V_0(x, t, u) \in \mathcal{U}'$ 满足 $[V_0, L] = \frac{\partial L}{\partial t} + L'[X_0]$; (2) 对任一 G_i ($i \geq 0$) 特征算子方程 (2.7) 有算子解 $V_{i+1} = V(G_i) \in \mathcal{U}'$ ($i \geq 0$). 则算子 $A_n = \sum_{i=0}^n V_i L^{n-i} \in \mathcal{U}'$ ($n \geq 0$) 满足

$$[A_n, L] = \frac{\partial L}{\partial t} + L'[X_n] \quad (n \geq 0). \quad (2.8)$$

证 当 $n=0$ 时, $A_0 = V_0$, 故 (2.8) 显然成立. 下设 $n \geq 1$. 从 (2.7) 我们有

$$[V_i, L] = L'[X_i] - L'[X_{i-1}]L + \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial t}L, \quad i \geq 1.$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } [A_n, L] &= \left[\sum_{i=0}^n V_i L^{n-i}, L \right] = \sum_{i=0}^n [V_i, L] L^{n-i} \\ &= \left(\frac{\partial L}{\partial t} + L'[X_0] \right) L^n + \sum_{i=1}^n (L'[X_i] - L'[X_{i-1}]L + \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial t}L) L^{n-i} \\ &= \frac{\partial L}{\partial t} + L'[X_n], \end{aligned}$$

这说明当 $n \geq 1$ 时 (2.8) 式也成立. 因此定理结论为真.

由此定理可推得如下结论.

推论 2.1 在定理 2.1 的假设下, 如果 L 不显含 t 且 Gateaux 导数 $L': S \rightarrow L'[S]$ ($S \in \mathcal{A}^q$) 是单性同态, 则位势向量 u 是特征值问题 (1.2a) 的有限带势, 即满足某个驻定方程 $\sum_{i=0}^m C_{m-i} X_i = 0$ ($m \geq 0$) 当且仅当算子 $\sum_{i=0}^m C_{m-i} A_i = 0$ ($m \geq 0$) 与谱算子 L 可交换, 这里 $C_0, C_1, \dots, C_m$ 是复常数.

证 由 (2.5) 和 (2.8) 并注意 $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, 我们有

$$L' \left[\sum_{i=0}^m C_{m-i} X_i \right] = \sum_{i=0}^m C_{m-i} L'[X_i] = \sum_{i=0}^m C_{m-i} [A_i, L] = \left[\sum_{i=0}^m C_{m-i} A_i, L \right],$$

又由假设 L' 是单的, 故推论结论直接从上式得出.

由定理 2.1 我们还可得到如下主要结果.

定理 2.2 设定理 2.2 中的二条件满足, 且 Gateaux 导数 $L': S \rightarrow L'[S] (S \in \mathcal{A}^q)$ 是单线性同态, 则由 (2.6) 定义的发展方程 $u_t = X_n (n \geq 0)$ 具有 Lax 表示

$$\frac{dL}{dt} = [A_n, L] = \left[\sum_{i=0}^n V_i L^{n-i}, L \right] \quad (n \geq 0). \quad (2.9)$$

证 注意 (2.2), 通过定理 2.1 我们得到

$$\frac{dL}{dt} - [A_n, L] = \frac{\partial L}{\partial t} + L'[u_t] - \left(\frac{\partial L}{\partial t} + L'[X_n] \right) = L'[u_t] - L'[X_n] \stackrel{(2.5)}{=} L'[u_t - X_n],$$

又因 Gateaux 导数 L' 为单射, 故 $u_t = X_n$ 当且仅当 $\frac{dL}{dt} = [A_n, L]$, 这即为所证.

附注 2.1 当 Gateaux 导数 $L': S \rightarrow L'[S] (S \in \mathcal{A}^q)$ 是单线性同态时, 定理 2.1 中的条件 (1) 即要求方程族 (2.6) 的第一个方程具有 Lax 表示 $\frac{dL}{dt} = [V_0, L]$.

至此我们给出了具有 Lenard 递推结构的方程族 (2.6) 的一种 Lax 表示的一般框架, 按这里的方法寻求方程族 (2.6) 的 Lax 表示的步骤可归为如下:

(1) 构造 Gateaux 导数 $L': S \rightarrow L'[S] (S \in \mathcal{A}^q)$ 为单线性同态的谱算子 $L = L(x, t, u) \in \mathcal{U}^r$;

(2) 对一般的函数向量 $Y = Y(x, t, u) \in \mathcal{A}^q$ 求解特征算子方程 (2.7) 的算子解 $V = V(Y) \in \mathcal{U}^r$;

(3) 寻求第一个方程 $u_t = X_0$ 的 Lax 表示 $\frac{dL}{dt} = [A_0, L]$ (可用 Chen-Lee-Liu 方法^[12]);

(4) 得出方程族 (2.6) 的一族 Lax 表示:

$$L_t = [A_n, L] = \left[\sum_{i=0}^n V_i L^{n-i}, L \right], \quad n \geq 0.$$

下一节我们将按本节的一般方法构造二族可积方程的 Lax 表示. 对可积方程族, 步骤 (1) 所需的谱算子通常可从相应的线性特征值问题得到, 并且 L 常不显含时间变量 t , 此时特征算子方程 (2.7) 变成

$$[V, L] = L'[MY] - L'[JY]L. \quad (2.10)$$

另外, 由于第一个方程 $u_t = X_0$ 形式较为简单, 故步骤 (3) 不产生本质困难.

3 对可积族的应用

这一节我们将上一节的一般方法应用到二种可积发展方程族. 我们首先观察一下一个线性特征值问题如何改写成 Lax 形式, 举例来说考虑下列单个空间变量的线性特征值问题:

$$\sum_{i=-l}^{l-1} \sum_{j=1}^m a_{ij} \lambda^i \partial \varphi = \sum_{i=-l}^l U_i(x, t, u) \lambda^i \varphi, \quad \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T, \quad (3.1)$$

其中 $k, l \geq 0$, a_{ij} , $-k \leq i \leq l-1$, $1 \leq j \leq m$, 是复常数, U_i , $-k \leq i \leq l$, 是 $n \times n$ 阶矩阵乘积算子. 先改写 (3.1) 为

$$\lambda^k \varphi = \sum_{i=-l}^{l-1} W_{i+k+1}(x, t, u, \partial) \lambda^i \varphi, \quad (3.2)$$

这里 W_i , $1 \leq i \leq k+l$, 是 $n \times n$ 阶矩阵微分算子. 再令变换

$$\phi^i = \lambda^{i-k-1} \phi, 1 \leq i \leq k+l, \quad (3.3)$$

则(3.2)等价于下列 Lax 形式

$$L\psi = \lambda\psi, L = \begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & I_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & I_n \\ W_1 & W_2 & \cdots & \cdots & W_{k+l} \end{bmatrix}, \quad \psi = \begin{bmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \vdots \\ \psi^{k+l} \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

这里 I_n 表示 n 阶单位方阵. (3.4) 即是特征值问题(3.1)的 Lax 形式. 注意在能改写为(3.2)的特征值问题(3.1)中 U_i 不见得可逆.

下面我们分别考虑 KdV 可积族和 Antonowicz-Fordy 可积族的 Lax 表示.

(1) 首先考虑 KdV 方程族:

$$u_t = X_n = \Phi u_x, x, t \in \mathbb{R}, \Phi = \alpha \partial + 4u + 2u_x \partial^{-1}, \partial = \frac{d}{dx}, n \geq 0, \quad (3.5)$$

这里 α 为任意的复常数, Φ 是遗传对称并且是方程族(3.5)的公共的递推算子, 方程族(3.5)的第一个典型方程即为 KdV 方程:

$$u_t = X_1 = \Phi u_x = \alpha u_{xxx} + 6uu_x. \quad (3.6)$$

步骤(1): 选取谱算子

$$L = \beta \partial + \gamma u, \gamma \neq 0,$$

这里常数 β, γ 待定. 显然 L 的 Gateaux 导数

$$L'[S] = \gamma S, S \in \mathcal{A}$$

为单线性同态.

步骤(2): 由 KdV 族(3.5)的双 Hamilton 性我们知道: KdV 族(3.5)具有(2.6)显示的 Lenard 递推形式. 这时的 Lenard 算子对可取为下列 Hamilton 算子对:

$$J = \partial, M = \alpha \partial + 4u\partial + 2u_x, \quad (3.7)$$

且 G 向量场为

$$G_n = \Psi^n u_x, \Psi = \Phi^* = \alpha \partial + 4u - 2\partial^{-1} u_x, n \geq 0. \quad (3.8)$$

注意 $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, 对 $T \in \mathcal{A}$ 我们搜寻特征算子方程(2.10)如下形式的算子解 $V = V(Y) \in \mathcal{U}$

$$V = P + Q\partial, P, Q \in \mathcal{A}$$

通过直接计算可得 V 与 L 的换位子 $[V, L]$:

$$[V, L] = (-\beta P_{xx} + \gamma u_x Q + 2\gamma u Q_x) - \beta(2P_x + Q_{xx})\partial - 2Q_x L,$$

又 $L'[MY] - L'[JY]L = \gamma(MY) - \gamma(JY)L = \gamma(\alpha Y_{xxx} + 4uY_x + 2u_x Y) - \gamma Y_x L$, 于是

$$2Q_x = \gamma Y_x, 2P_x + Q_{xx} = 0, \quad (3.9)$$

$$-\beta P_{xx} + \gamma u_x Q + 2\gamma u Q_x = \gamma(\alpha Y_{xxx} + 4uY_x + 2u_x Y), \quad (3.10)$$

由(3.9)可确定出 $Q = \frac{1}{2}\gamma Y, P = -\frac{1}{4}\gamma Y_x$, 代入(3.10)可确定 $\beta = 4\alpha, \gamma = 4$, 故

$$P = -Y_x, Q = 2Y.$$

这样我们得到要求的谱算子 L :

$$L = 4\alpha \partial + 4u, \quad (3.11)$$

和相应的特征算子方程(2.10)的算子解 $V = V(Y)$:

$$V = V(Y) = -Y_x + 2Y\partial. \quad (3.12)$$

步骤(3): 求解 $[V_0, L] = L'[X_0]$. 令 $V_0 = c\partial, c$ 为复常数, 则

$$[V_0, L] = [c\partial, 4\alpha\partial^2 + 4u] = [c\partial, 4u] = 4cu_x,$$

又 $L'[X_0] = 4X_0 = 4u_x$, 故 $c=1$. 从而 $A_0 = V_0 = \partial$ 是 $u_t = X_0 = u_x$ 的 Lax 表示中的 A 算子.

步骤(4): 综上所述我们已得到了如下结果.

定理 3.1 设 L 和 $\{G_n\}_{n=0}^\infty$ 分别由 (3.11) 和 (3.8) 确定, 并令

$$A_n = \sum_{i=0}^n V_i L^{n-i} = \sum_{i=0}^n (-G_{i-1,x} + 2G_{i-1}\partial) L^{n-i}, \quad G_{-1} = \frac{1}{2}, \quad (3.13)$$

则 (1) 由 (3.5) 给出的向量场 $X_n (n \geq 0)$ 满足 $L'[X_n] = [A_n, L] (n \geq 0)$; (2) 由 (3.5) 定义的 n 阶 KdV 方程 $u_t = X_n (n \geq 0)$ 具有 Lax 表示 $\frac{dL}{dt} = [A_n, L] (n \geq 0)$.

按 (3.13) 式我们有

$$\begin{aligned} A_1 &= V_0 L + V_1 = \partial(4\alpha\partial^2 + 4u) + (-u_x + 2u\partial) \\ &= 4\alpha\partial^3 + 3u_x + 6u\partial. \end{aligned}$$

这样我们得到 KdV 方程 (3.6) 的一个 Lax 对:

$$L = 4\alpha\partial^3 + 4u, \quad A_1 = 4\alpha\partial^3 + 3u_x + 6u\partial. \quad (3.14)$$

由定理 3.1 我们还可得到:

推论 3.1 设 $L, \{X_n\}_{n=0}^\infty$ 和 $\{A_n\}_{n=0}^\infty$ 分别由 (3.11), (3.5) 和 (3.13) 确定, 则位势 u 为

(1.2a) 的有限带势, 即满足某一驻定方程 $\sum_{i=0}^m \alpha_{m-i} X_i = 0 (m \geq 0)$ 的充分必要条件是算子

$\sum_{i=0}^m \alpha_{m-i} A_i = 0 (m \geq 0)$ 与算子 L 可交换, 其中 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ 是复常数.

(2) 其次考虑 Antonowicz-Fordy 方程族^[8]:

$$u_t = X_n = \Phi^n f_0, \quad n \geq 0, \quad (3.15)$$

其中
$$u = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} 0 & \Phi_0 \\ \vdots & \vdots \\ I_N & \Phi_N \end{bmatrix}, \quad f_0 = \begin{bmatrix} q_{0x} \\ q_{1x} \\ \vdots \\ q_{Nx} \end{bmatrix}, \quad N \geq 1, \quad (3.16)$$

而且
$$\Phi_i = q_i + \frac{1}{2} q_{ix} \partial^{-1} - \frac{1}{4} \epsilon_i \partial^2, \quad \epsilon_i = 0 \text{ 或 } 1, \quad 0 \leq i \leq N. \quad (3.17)$$

这里的 Φ 是一个遗传对称且是方程族 (3.15) 的公共的递推算子. 当 $n=1$ 时, 我们得到第一个非平凡的方程组:

$$\begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{N-1} \\ q_N \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} q_0 q_{Nx} + \frac{1}{2} q_N q_{0x} - \frac{1}{4} \epsilon_0 q_{Nxxx} \\ q_{0x} + q_1 q_{Nx} + \frac{1}{2} q_N q_{1x} - \frac{1}{4} \epsilon_1 q_{Nxxx} \\ \vdots \\ q_{N-2,x} + q_{N-1} q_{Nx} + \frac{1}{2} q_N q_{N-1,x} - \frac{1}{4} \epsilon_{N-1} q_{Nxxx} \\ q_{N-1,x} + \frac{3}{2} q_N q_{Nx} - \frac{1}{4} \epsilon_N q_{Nxxx} \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

步骤(1): 我们知道^[8] Antonowicz-Fordy 族相应于下列线性特征值问题

$$\left[\left(- \sum_{i=0}^N \epsilon_i \lambda^{2i} \right) \partial + \sum_{i=0}^N q_i \lambda^{2i} \right] \varphi = \lambda^{2(N+1)} \varphi. \quad (3.19)$$

当 ϵ_i 仅有一个不为零时, 上述特征值问题在文献 [13, 14] 中详细讨论过, 其它一些更特别

的情形可参见[15,16]. 作形如(3.3)的变换:

$$\psi^i = \lambda^{2(i-1)} \phi, \quad 1 \leq i \leq N+1,$$

此时(3.19)可改写成下列 Lax 形式:

$$L\psi = \lambda^L \psi, L = \begin{bmatrix} 0 & I_N \\ L_0 & L_1 \cdots L_N \end{bmatrix}, \quad (3.20a)$$

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \vdots \\ \psi^{N+1} \end{bmatrix}, L_i = q_i - \epsilon_i \partial, \quad 0 \leq i \leq N. \quad (3.20b)$$

显然 L 的 Gateaux 导数为

$$L'[S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ S_1 & S_2 & \cdots & S_{N+1} \end{bmatrix}, S = (S_1, S_2, \cdots, S_{N+1})^T \in \mathcal{A}^{N+1},$$

这是一个单线性同态.

步骤(2): 可取相应的 Lenard 算子对 J, M :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & J_0 & & \\ & J_1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ J_0 & J_1 & \cdots & J_{N-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 0 & J_0 & & \\ & J_1 & & \\ & & \ddots & \\ J_0 & J_1 & \cdots & J_N \end{bmatrix}, \quad (3.21a)$$

$$\text{其中} \quad J_i = \frac{1}{2} q_{ix} + q_i \partial - \frac{1}{4} \epsilon_i \partial^2, \quad 0 \leq i \leq N, \quad (3.21b)$$

此时相应的 G 向量场为

$$G_0 = (0, \cdots, 0, 2, q_N)^T, G_n = \Psi^n G_0, \quad n \geq 0, \quad (3.22a)$$

$$\text{其中} \quad \Psi = \Phi^* = \begin{bmatrix} 0 & I_N \\ \Psi_0 & \Psi_1 \cdots \Psi_N \end{bmatrix}, \Psi_i = \Phi_i^* = q_i - \frac{1}{2} \partial^{-1} q_{ix} - \frac{1}{4} \epsilon_i \partial^2, \\ 0 \leq i \leq N. \quad (3.22b)$$

类似地对 $Y = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_{N+1})^T \in \mathcal{A}^{N+1}$, 我们寻找算子方程(2.10)的下列一阶微分算子解 $V = V(Y) \in \mathcal{A}^{N+1}$

$$V = \begin{bmatrix} P_1 & & 0 \\ & P_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & P_{N+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1 & & 0 \\ & Q_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & Q_{N+1} \end{bmatrix} \partial, P_i, Q_i \in \mathcal{A}, \quad 1 \leq i \leq N+1.$$

容易算得

$$VL = \begin{bmatrix} & P_1 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & 0 & & P_N \\ P_{N+1} L_0 & P_{N+1} L_1 & \cdots & P_{N+1} L_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & Q_1 \partial & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & 0 & & Q_N \partial \\ Q_{N+1} \partial L_0 & Q_{N+1} \partial L_1 & \cdots & Q_{N+1} \partial L_N \end{bmatrix},$$

$$LV = \begin{bmatrix} & P_2 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & 0 & & P_{N+1} \\ L_0 P_1 & L_1 P_2 & \cdots & L_N P_{N+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & Q_2 \partial & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & 0 & & Q_{N+1} \partial \\ L_0 Q_1 \partial & L_1 Q_2 \partial & \cdots & L_N Q_{N+1} \partial \end{bmatrix}$$

令 $JY = ((JY)_1, \dots, (JY)_{N+1})^T$, $MY = ((MY)_1, \dots, (MY)_{N+1})^T$, 明显地有

$$(JY)_{N+1} = Y_{N+1,x}, \quad (MY)_1 = J_0 Y_{N+1},$$

$$(JY)_i + J_i Y_{N+1} = (MY)_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq N.$$

因此我们可得:

$$\begin{aligned} & L'[MY] - L'[JY]L \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ J_0 Y_{N+1} & (MY)_2 & \cdots & (MY)_{N+1} \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ (JY)_1 & \cdots & (JY)_N & Y_{N+1,x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_N \\ \cdots & \cdots \\ L_2 & L_1 & \cdots & L_N \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ J_0 Y_{N+1} & (MY)_2 & \cdots & (MY)_{N+1} \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} 0 & & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & & 0 & \cdots & 0 \\ Y_{N+1,x} L_0 & (JY)_1 + Y_{N+1,x} L_1 & \cdots & (JY)_N + Y_{N+1,x} L_N \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & & 0 & \cdots & 0 \\ J_0 Y_{N+1} - Y_{N+1,x} L_0 & J_1 Y_{N+1} - Y_{N+1,x} L_1 & \cdots & J_N Y_{N+1} - Y_{N+1,x} L_N \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

于是特征算子方程(2.10)要求

$$P_1 = P_2 = \cdots = P_{N+1} \triangleq P, \quad Q_1 = Q_2 = \cdots = Q_{N+1} \triangleq Q,$$

进一步要求

$$[P, L_i] + [Q\partial, L_i] = J_i Y_{N+1} - Y_{N+1,x} L_i, \quad 0 \leq i \leq N. \quad (3.23)$$

直接计算可得:

$$[P, L_i] + [Q\partial, L_i] = (\epsilon_i P_{xx} + q_{ix} Q) + \epsilon_i (2P_x + Q_{xx})\partial + 2\epsilon_i Q_x \mathcal{F}, \quad 0 \leq i \leq N,$$

$$J_i Y_{N+1} - Y_{N+1,x} L_i = \left(\frac{1}{2} q_{ix} Y_{N+1} - \frac{1}{4} \epsilon_i Y_{N+1,xxx}\right) + \epsilon_i Y_{N+1,x} \mathcal{F}, \quad 0 \leq i \leq N.$$

基于这二式,由(3.23)可确定出 $P = -\frac{1}{4} Y_{N+1,x}$, $Q = \frac{1}{2} Y_{N+1}$. 这样我们得到了相应的特征算子方程(2.10)的一个一阶微分算子解:

$$V = V(Y) = -\frac{1}{4} Y_{N+1,x} I_{N+1} + \frac{1}{2} Y_{N+1} I_{N+1} \partial. \quad (3.24)$$

附注 3.1 通过复杂的计算可以表明:在一阶微分算子类中,此时相应的特征算子方

程(2.10)有仅有上述(3.24)的解.

步骤(3): 求解算子方程

$$[V_0, L] = L'[X_0], \quad (3.25)$$

令

$$V_0 = P^0 I_{N+1} + Q^0 I_{N+1} \partial,$$

则利用步骤(2)中的推导容易看出(3.25)等价于

$$(\epsilon_i P_{xx}^0 + q_{ix} Q^0) + \epsilon_i (2P_x^0 + Q_{xx}^0) \partial + 2\epsilon_i Q_x^0 \partial^2 = q_{ix}, \quad 0 \leq i \leq N,$$

由此推出 $P^0 = 0, Q^0 = 1$. 于是(3.25)有解 $V_0 = I_{N+1} \partial$, 进一步方程 $u_i = X_0$ 有 Lax 对: $L, A_0 = V_0$.

步骤(4): 综合上述三个步骤的推导由第二节的一般结果我们得到:

定理 3.2 设 L 由(3.20)确定, $G_n = (G_{n1}, \dots, G_{n, N+1})^T, n \geq 0$, 由(3.22)定义, $X_n, n \geq 0$, 由(3.15)定义, 并令

$$A_n = \sum_{i=0}^n V_i L^{n-i} = \sum_{i=0}^n \left[-\frac{1}{4} (G_{i-1, N+1})_x + \frac{1}{2} G_{i-1, N+1} \partial \right] L^{n-i},$$

$$G_{i-1, N+1} = 2, \quad n \geq 0. \quad (3.26)$$

则向量场 $X_n (n \geq 0)$ 满足 $L'[X_n] = [A_n, L] (n \geq 0)$, 并且 n 阶 Antonowicz-Fordy 方程 $u_n = X_n (n \geq 0)$ 具有 Lax 表示 $\frac{dL}{dt} = [A_n, L] (n \geq 0)$.

注意 L' 是单线性同态, 由此定理立刻推得:

推论 3.2 设 $L, \{X_n\}_{n=0}^\infty$ 和 $\{A_n\}_{n=0}^\infty$ 分别由(3.20), (3.15)和(3.26)给出, 则位势向量 $u = (q_0, q_1, \dots, q_N)^T$ 是特征值问题 $L\psi = \lambda^2 \psi$ 的有限带势, 即为某个驻定方程 $\sum_{i=0}^m \beta_{m-i} X_i = 0 (m \geq 0)$ 的解当且仅当相应的微分算子 $\sum_{i=0}^m \beta_{m-i} A_i = 0 (m \geq 0)$ 与谱算子 L 可交换, 这里 $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$ 是某一组复常数.

按定理 3.2 我们计算方程(3.18)的 Lax 表示. 由(3.26)得:

$$\begin{aligned} A_1 &= V_1 + V_0 L \\ &= \left(-\frac{1}{4} q_{Nx} I_{N+1} + \frac{1}{2} q_N I_{N+1} \partial \right) + \partial L \\ &= \left(-\frac{1}{4} q_{Nx} I_{N+1} + \frac{1}{2} q_N I_{N+1} \partial \right) + \begin{bmatrix} 0 & & I_N \partial \\ \partial L_0 & \partial L_1 & \dots & \partial L_N \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} q_{Nx} + \frac{1}{2} q_N \partial & \partial & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & -\frac{1}{4} q_{Nx} + \frac{1}{2} q_N \partial & \partial \\ q_{0x} + q_0 \partial - \epsilon_0 \partial^3 & \dots & q_{N-1, x} + q_{N-1} \partial - \epsilon_{N-1} \partial^3 & \frac{3}{4} q_{Nx} + \frac{3}{2} q_N \partial - \epsilon_N \partial^3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因此方程(3.18)具有 Lax 对: L_1, A_1 .

类似地对其它各种 $1+1$ 维的可积系统也可按 § 2 的框架构造出相应的 Lax 表示, 只要可积族具有递推结构(2.6).

致谢 作者对屠规彰教授的热情鼓励和悉心指点表示衷心感谢, 与李翊神教授和曹策问教授分别作过一些讨论, 在此也向他们表示诚挚的谢意.

参 考 文 献

- [1] Lax P D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1968, 21: 467—490.
- [2] Flaschka H. The Toda lattice I existence of integrals. *Phys. Rev.* 1974, B9: 1924—1925.
- [3] Moser J. Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations. *Advances in Math.*, 1975, 16: 197—220.
- [4] 马文秀. 向量场的生成子与发展方程的时间依赖对称. *中国科学 A 辑*, 1991, (22): 129—139.
- [5] Drazin P G. & Johnson, R. S., *Solitons: an Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989, Chapter 5.
- [6] Ercolani N M & Flaschka H. The geometry of the Hill equation and of the Neumann system. *Phil. Trans. R. Soc. London* 1985, A3(5): 405—422.
- [7] 曹策问. 保谱方程的换位表示. *科学通报*, 1989, 39(10): 723—724.
- [8] Antonowicz M & Fordy A P. Coupled KdV equations with multi-Hamiltonian structures. *Physica D*, 1987, 28: 345—359.
- [9] Guerrero F G & Alonso L M. Generalised variational derivatives in field theory. *J. phys. A: Math. Gen.*, 1980, 13: 689—700.
- [10] Newell A C. *Solitons in Mathematics and physics*. SIAM, Philadelphia: 1985. Chapter 3.
- [11] Tu, G Z. The trace identity, a powerful tool for constructing the Hamiltonian structure of integrable systems. *J. Math. Phys.*, 1989, 30(2): 330—338.
- [12] Chen H H Lee Y C & Liu C S. Integrability of nonlinear Hamiltonian systems by inverse scattering method. *Phys. Scr.*, 1979, 20: 490—492.
- [13] 马文秀. 非线性演化方程的广义 Hamilton 结构之研究. 硕士论文, 中国科学院计算中心, 1985.
- [14] Boiti M. Caudrey P J & Pempinelli F. A hierarchy of Hamiltonian evolution equations associated with a generalized Schrödinger spectral problem. *Il Nuovo Cimento*, 1984, B83: 71—87.
- [15] Alonso L M. Schrödinger spectral problems with energy — dependent potentials as sources of nonlinear Hamiltonian evolution equations. *J. Math. Phys.*, 1980, 21(12): 2342—2349.
- [16] Boiti M Laddomada C, Pempinelli F & Tu G Z. On a new hierarchy of Hamiltonian soliton equations. *J. Math. Phys.*, 1983, 24: 2035—2041.