

无限维 Hamilton 系统中的一些 Hamilton 算子*

马文秀

(中国科学院计算中心)

SOME HAMILTONIAN OPERATORS IN INFINITE DIMENSIONAL HAMILTONIAN SYSTEMS

Ma Wen-xiu

(Computing Centre of Academia Sinica)

Abstract

In this paper some Hamiltonian operators with special forms are presented. Firstly, the sum operators of a class of u -linear differential operators of the first order and constant coefficient differential operators are discussed, and the necessary and sufficient conditions for them to be Hamiltonian are obtained. Based on these conditions, one typical case is analysed. Next, three Hamiltonian operators are generated directly from infinite dimensional Lie algebras. Thirdly, a kind of matrix differential operators corresponding to the structural functions of the second degree is constructed and an algebraic description for them to be Hamiltonian is proposed.

§ 1. 引言

在有限维与无限维 Hamilton 系统的研究中,对 Hamilton 算子^[1]的研究是其重要的一个方面.

我们已知从线性特征值问题:

$$\begin{cases} \varphi_x = U(u, \lambda)\varphi \\ \varphi_t = V(u, \lambda)\varphi \end{cases} \quad (1.1)$$

出发得到的一族可积系:

$$u_t = JL^n f_0(u) \quad (1.2)$$

本文1988年1月28日收到.

* 上海交通大学科研基金 A1190 资助的课题.

常具有 Hamilton 结构, 即

$$u_t = J \frac{\delta H}{\delta u} \quad (1.3)$$

这里 J 是一个 Hamilton 算子, 而且 J, JL 常构成一个 Hamilton 对, 从而具有双 Hamilton 结构^[2,3]. 由此易知^[4]方程族具有对合的无穷多守恒律. 例如 KdV 方程族可写成如下双 Hamilton 形式

$$u_t = K \frac{\delta}{\delta u} f_{i+1} = H \frac{\delta}{\delta u} f_i, \quad f_0 = 3u, \quad i \geq 0, \quad (1.4)$$

这里 $K = \frac{d}{dx}$, $H = \left(\frac{d}{dx}\right)^3 + \frac{2}{3}u \frac{d}{dx} + \frac{1}{3}u_x$. 相应的 $J = K$, $L = J^{-1}H$, 而 $J = K$ 与 $JL = H$ 构成一个 Hamilton 对, 此时 $\{f_i\}$ 是对合的公共守恒律. 另一方面从一个 Hamilton 对出发往往能得到一族可积系^[9]. 因此给出验证 Hamilton 算子的条件及寻找新的 Hamilton 算子与算子对研究可积系都具有重要的意义.

Гельфанд 和 Дорфман 从一般李代数 U -模 (U, M) 出发, 详细刻画了与 Hamilton 算子相关的代数结构^[1], 并且给出了关于位势向量 u 线性的 Hamilton 算子的一个李代数描述^[9]. 本文在此代数理论的基础上, 对一些重要的 Hamilton 算子得到了关于其系数的判别条件, 并且直接从李代数出发构造了三个 Hamilton 算子.

本文中除非特殊说明总设 I 是一个任意的指标集(可以有限也可无限),

$$E = \{e_i | i \in I\},$$

X 表示在复数域 C 上由 E 张成的复线性空间 $L_C(E)$, Z 表示全体整数, Z_+ 表示全体非负整数, R 表示全体实数, 并且约定对在和号及等式中出现的指标在其所属范围内没有限制时, 省略指标范围.

§ 2. 一阶微分算子与常系数微分算子之和构成的 Hamilton 算子

考虑下列一阶二元多项式函数组:

$$\varphi_{ij}^k(\lambda, \mu) = c_{ij}^k \lambda - c_{ji}^k \mu, \quad i, j, k \in I, \quad (2.1)$$

其中 $\{c_{ij}^k\}$ 是一组可行数组, 即对每一 $(i, j) \in I \times I$, 均只有有限个 $k \in I$ 使 c_{ij}^k 非零.

设 $\{\varphi_{ij}^k\}$ 所相应的线性算子为 $H = \|H_{ij}\|$, $\xi = \{\xi_i | i \in I\}$, $\eta = \{\eta_i | i \in I\}$, 并记 $\xi_i^{(1)} = \frac{d}{dx} \xi_i$, 余同.

因

$$\begin{aligned} (H\xi, \eta) &\triangleq \int \sum_{i,j} \eta_i (H_{ij} \xi_j) dx = \int \sum_k u_k \sum_{i,j} (c_{ij}^k \xi_i^{(1)} \eta_j - c_{ji}^k \xi_i \eta_j^{(1)}) dx \\ &= \int \sum_{i,j} \eta_i \sum_k \left[c_{ij}^k u_k^{(1)} + (c_{ij}^k + c_{ji}^k) u_k \frac{d}{dx} \right] \xi_j dx, \end{aligned}$$

故上述 $\{\varphi_{ij}^k\}$ 所相应的线性算子 $H = \|H_{ij}\|$ 为:

$$H_{ij} = \sum_k \left[c_{ij}^k u_k^{(1)} + (c_{ij}^k + c_{ji}^k) u_k \frac{d}{dx} \right], \quad i, j \in I. \quad (2.2)$$

在 X 上定义双线性二元运算如下:

$$e_i \circ e_j = \sum_k c_{ij}^k e_k, \quad i, j \in I, \quad (2.3)$$

则^[1] (2.2) 确定的算子 H 是 Hamilton 算子的充要条件为:

$$(a \circ b) \circ c = (a \circ c) \circ b, \quad a, b, c \in X, \quad (2.4)$$

$$(a \circ b) \circ c + c \circ (a \circ b) = (c \circ b) \circ a + a \circ (c \circ b), \quad a, b, c \in X. \quad (2.5)$$

设常系数矩阵微分算子 $K = \|K_{ij}\|$:

$$K_{ij} = \sum_m b_{ijm} \left(\frac{d}{dx} \right)^m, \quad i, j \in I, \quad (2.6)$$

其中 $b_{ijm} \in \mathbb{C}$, $i, j \in I$, $m \in \mathbb{Z}_0^+$, 并且对任意固定的 $\forall (i, j) \in I \times I$, b_{ijm} 关于 m 只有有限个非零.

关于上述一阶微分算子 H 与常系数微分算子 K 之和的 Hamilton 性我们有:

定理 1 设 H 是由 (2.2) 确定的 Hamilton 算子, K 是由 (2.6) 定义的常系数微分算子, 则 $H + K$ 为 Hamilton 算子的充要条件是

$$-b_{ijm} = (-1)^m b_{jim}, \quad m \geq 0, \quad (2.7)$$

$$c_0(i, j, k) + c_0(k, j, i) = c_0(k, i, j) + c_0(i, k, j), \quad (2.8)$$

$$c_1(i, j, k) = c_1(k, j, i), \quad (2.9)$$

$$c_2(i, j, k) + c_2(k, j, i) = 0, \quad (2.10a)$$

$$c_2(i, j, k) + \text{循环}(i, j, k) = 0, \quad (2.10b)$$

$$c_3(i, j, k) = c_3(k, j, i) = c_3(j, i, k), \quad (2.11)$$

$$c_m(i, j, k) = 0, \quad m \geq 4, \quad (2.12)$$

其中

$$c_m(i, j, k) = \sum_l c_{ij}^l b_{lkm}, \quad i, j, k \in I, m \geq 0. \quad (2.13)$$

证 考虑如下两个等式^[1]

$$\langle e_{i\lambda}, e_{j\mu} \rangle = -\langle e_{j\mu}, e_{i\lambda} \rangle, \quad \lambda + \mu = 0, \quad (2.14)$$

$$\langle [e_{i\lambda}, e_{j\mu}], e_{kv} \rangle + \left(\text{同时循环} \begin{smallmatrix} ijk \\ \lambda\mu\nu \end{smallmatrix} \right) = 0, \quad \lambda + \mu + \nu = 0, \quad (2.15)$$

按定义当 $\lambda + \mu = 0$ 时, $\langle e_{i\lambda}, e_{j\mu} \rangle \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_m b_{ijm} \mu^m$, 故 (2.14) 等价于 (2.7) 式. 下面考虑

(2.15) 式. 因 H 的结构函数组为

$$\varphi_{ij}^k(\lambda, \mu) = c_{ij}^k \lambda - c_{ji}^k \mu,$$

故

$$[e_{i\lambda}, e_{j\mu}] = \sum_l (c_{ij}^l \lambda - c_{ji}^l \mu) e_{l, \lambda + \mu}.$$

于是当 $\lambda + \mu + \nu = 0$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}
 \langle [e_{i\lambda}, e_{j\mu}], e_{kv} \rangle &= \sum_i (c_{ij\lambda}^i - c_{ji\mu}^i) \langle e_{i, \lambda+\mu}, e_{kv} \rangle \\
 &= \sum_i (c_{ij\lambda}^i - c_{ji\mu}^i) \left(\sum_m b_{ikm} v^m \right) \\
 &= \sum_m \left(\sum_i c_{ij\lambda}^i b_{ikm} \lambda v^m - \sum_i c_{ji\mu}^i b_{ikm} \mu v^m \right) \\
 &= \sum_m (c_m(i, j, k) \lambda v^m - c_m(j, i, k) \mu v^m).
 \end{aligned}$$

由此得, 当 $\lambda + \mu + v = 0$ 时

$$\begin{aligned}
 \langle [e_{i\lambda}, e_{j\mu}], e_{kv} \rangle + \left(\text{同时循环} \begin{matrix} ijk \\ \lambda\mu v \end{matrix} \right) \\
 = \sum_m (c_m(i, j, k) \lambda v^m - c_m(j, i, k) \mu v^m + c_m(j, k, i) \mu \lambda^m \\
 - c_m(k, j, i) v \lambda^m + c_m(k, i, j) v \mu^m - c_m(i, k, j) \lambda \mu^m).
 \end{aligned}$$

进一步注意 $\lambda + \mu + v = 0$,

$$\begin{aligned}
 \langle [e_{i\lambda}, e_{j\mu}], e_{kv} \rangle + \left(\text{同时循环} \begin{matrix} ijk \\ \lambda\mu v \end{matrix} \right) \\
 = \sum_m [(-1)^m c_m(i, j, k) \lambda (\lambda + \mu)^m - (-1)^m c_m(j, i, k) \mu (\lambda + \mu)^m \\
 + c_m(j, k, i) \mu \lambda^m + c_m(k, j, i) (\lambda + \mu) \lambda^m \\
 - c_m(k, i, j) (\lambda + \mu) \mu^m - c_m(i, k, j) \lambda \mu^m].
 \end{aligned}$$

因上式和号中各项都为 $m+1$ 次齐次二元多项式, 故 (2.15) 式等价于

$$\begin{aligned}
 &(-1)^m c_m(i, j, k) \lambda (\lambda + \mu)^m - (-1)^m c_m(j, i, k) \mu (\lambda + \mu)^m \\
 &+ c_m(j, k, i) \mu \lambda^m + c_m(k, j, i) (\lambda + \mu) \lambda^m \\
 &- c_m(k, i, j) (\lambda + \mu) \mu^m - c_m(i, k, j) \lambda \mu^m = 0, \quad m \geq 0.
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

当 $m=0$ 时, (2.16) 式即为

$$\begin{aligned}
 &c_0(i, j, k) \lambda - c_0(j, i, k) \mu + c_0(j, k, i) \mu + c_0(k, j, i) (\lambda + \mu) \\
 &- c_0(k, i, j) (\lambda + \mu) - c_0(i, k, j) \lambda = 0 \\
 \Leftrightarrow &c_0(i, j, k) + c_0(k, j, i) - c_0(k, i, j) - c_0(i, k, j) = 0,
 \end{aligned}$$

这等价于 (2.8) 式.

当 $m=1$ 时, (2.16) 式即为

$$\begin{aligned}
 &-c_1(i, j, k) \lambda (\lambda + \mu) + c_1(j, i, k) \mu (\lambda + \mu) + c_1(j, k, i) \mu \lambda \\
 &+ c_1(k, j, i) (\lambda + \mu) \lambda - c_1(k, i, j) (\lambda + \mu) \mu - c_1(i, k, j) \lambda \mu = 0.
 \end{aligned}$$

考虑 λ^2 项的系数可得: $c_1(i, j, k) = c_1(k, j, i)$, 此时 μ^2 、 $\lambda\mu$ 项的系数自动为零, 因而这时 (2.16) 式等价于 (2.9) 式.

当 $m=2$ 时, (2.16) 式即为

$$\begin{aligned}
 &c_2(i, j, k) \lambda (\lambda + \mu)^2 - c_2(j, i, k) \mu (\lambda + \mu)^2 + c_2(j, k, i) \mu \lambda^2 \\
 &+ c_2(k, j, i) (\lambda + \mu) \lambda^2 - c_2(k, i, j) (\lambda + \mu) \mu^2 - c_2(i, k, j) \lambda \mu^2 = 0.
 \end{aligned}$$

考虑 λ^3 、 $\lambda^2\mu$ 项的系数可得:

$$c_2(i, j, k) + c_2(k, j, i) = 0,$$

$$2c_2(i, j, k) - c_2(j, i, k) + c_2(j, k, i) + c_2(k, j, i) = 0,$$

在这二个条件下 μ^3 、 $\lambda\mu^2$ 项的系数自动为零。又在第一式下第二式变成

$$c_2(i, j, k) + c_2(k, i, j) + c_2(j, k, i) = 0,$$

于是这时 (2.16) 等价于 (2.10)。

当 $m = 3$ 时, (2.16) 即为

$$\begin{aligned} & -c_3(i, j, k)\lambda(\lambda + \mu)^3 + c_3(j, i, k)\mu(\lambda + \mu)^3 + c_3(j, k, i)\mu\lambda^3 \\ & + c_3(k, j, i)(\lambda + \mu)\lambda^3 - c_3(k, i, j)(\lambda + \mu)\mu^3 - c_3(i, k, j)\lambda\mu^3 = 0, \end{aligned}$$

考虑 λ^4 、 $\lambda^2\mu^2$ 项的系数可得:

$$c_3(i, j, k) = c_3(k, j, i), \quad c_3(i, j, k) = c_3(j, i, k),$$

此时 μ^4 、 $\lambda^3\mu$ 、 $\lambda\mu^3$ 项的系数自动为零。故这时 (2.16) 等价于 (2.11)。

当 $m \geq 4$ 时, 考虑 $\lambda^3\mu^{m-2}$ 及 $\lambda^2\mu^{m-1}$ 项可得:

$$c_2^m c_m(i, j, k) - c_3^m c_m(j, i, k) = 0,$$

$$c_1^m c_m(i, j, k) - c_2^m c_m(j, i, k) = 0.$$

由此可解得 $c_m(i, j, k) = 0$ 。反之一旦有这个条件就有 (2.16)。故 (2.16) 等价于 (2.12)。

综上所述 (2.16) 等价于 (2.8—2.12), 因此 (2.14)、(2.15) 等价于 (2.7—2.12)。又 (2.14)、(2.15) 是 $H + K$ 为 Hamilton 算子的充要条件^[1], 故定理所述结论为真。证毕。

当 $\{c_{ij}^k\}$ 对称, 即 $c_{ij}^k = c_{ji}^k$ 时, 由 (2.8) 可得

$$c_0(i, j, k) + c_0(j, k, i) = 2c_0(k, i, j),$$

$$c_0(j, k, i) + c_0(k, i, j) = 2c_0(i, j, k),$$

两式相减可推得 $c_0(i, j, k) = c_0(k, i, j)$ 。于是

$$c_0(i, j, k) = c_0(k, i, j) = c_0(j, k, i),$$

故

$$c_0(i, j, k) = c_0(j, k, i). \quad (2.17)$$

反之, 一旦有 (2.17) 就有 (2.8), 因此 (2.8) $\Leftrightarrow$ (2.17)。

由 (2.10a) 得到 $c_2(i, j, k) = -c_2(j, k, i)$, 故由 (2.10b) 可得 $c_2(k, i, j) = 0$, 即

$$c_2(i, j, k) = 0. \quad (2.18)$$

反之, 一有 (2.18) 就得到 (2.10), 故 (2.10) $\Leftrightarrow$ (2.18)。

另易知 (2.9) 等价于 $c_1(i, j, k) = c_1(j, k, i)$, (2.11) 等价于 $c_3(i, j, k) = c_3(j, k, i)$ 。

于是我们有

推论 1^[6] 设 Hamilton 算子 $H = \|H_{ij}\|$ 为:

$$H_{ij} = \sum_k \left(c_{ij}^k u_k^{(1)} + 2c_{ij}^k \frac{d}{dx} \right), \quad i, j \in I, \quad (2.19)$$

其中 $\{c_{ij}^k\}$ 是一组对称的可行数组, K 是由 (2.6) 定义的常系数算子, 则 $H + K$ 为 Hamilton 算子的充要条件是等式 (2.7) 成立, 且

$$\sum_l c_{lj}^l b_{lkm} = \sum_l c_{jk}^l b_{lim}, \quad m = 0, 1, 3, \quad (2.20)$$

$$\sum_i c_{ij}^l b_{ikm} = 0, \quad m = 2, m \geq 4. \quad (2.21)$$

当 $\{c_{ij}^k\}$ 反对称, 即 $c_{ij}^k = -c_{ji}^k$ 时, 类似地可以得到:

推论 2^[6] 设 Hamilton 算子 $H = \|H_{ij}\|$ 为:

$$H_{ij} = \sum_k c_{ij}^k \mu_k^{(1)}, \quad i, j \in I \quad (2.22)$$

其中 $\{c_{ij}^k\}$ 是一组反对称的可行数组, K 是由 (2.6) 定义的常系数算子, 则 $H+K$ 为 Hamilton 算子的充要条件是等式 (2.7) 成立, 且

$$\sum_i c_{ij}^l b_{ik0} = \sum_i c_{ik}^l b_{i0j}, \quad (2.23)$$

$$\sum_i c_{ij}^l b_{ikm} = 0, \quad m \geq 1. \quad (2.24)$$

§ 3. 李代数 $W = L_C(D_0)$ 产生的 Hamilton 算子

考虑元素集 $D_0 = \{e_{i\lambda} | i \in I, \lambda \in \mathbb{R}\}$ 或 $\{e_{i\lambda} | i \in I, \lambda \in \mathbb{Z}_0^+\}$, 令 $W = L_C(D_0)$ 即 W 是复数域上由 D_0 张成的线性空间. 又设 $\{\varphi_{ij}^k(\lambda, \mu)\}$ 是一组可行函数 (即 $\forall (i, j) \in I \times I$, 只有有限个 $k \in I$ 使 $\varphi_{ij}^k(\lambda, \mu)$ 非零), 在 W 上引进双线性二元运算:

$$[e_{i\lambda}, e_{j\mu}] = \sum_k \varphi_{ij}^k(\lambda, \mu) e_{k, \lambda+\mu}. \quad (3.1)$$

如果这个运算使 W 构成一个李代数, 则^[5]以 $\{\varphi_{ij}^k(\lambda, \mu)\}$ 为结构函数组的微分算子是一个 Hamilton 算子. 由此我们构造出一个李代数 W 就可得到一个相应的 Hamilton 算子.

设 $Q(x, y)$ 为 x, y 的二元多项式代数, $q(x) = \sum_{r=0}^n q_r x^r, n \geq 0$. 在 $Q(x, y)$ 上定义双线性算子 $[\cdot, \cdot]$ 如下:

$$[f(x, y), g(x, y)] = q(x)y \left(g \frac{\partial f}{\partial y} - f \frac{\partial g}{\partial y} \right), \quad (3.2)$$

令 $\partial = q(x)y \frac{\partial}{\partial y}$, 显然 ∂ 是代数 $Q(x, y)$ 上的一个微分, 这样可得

$$[f, g] = g \partial f - f \partial g. \quad (3.3)$$

容易得到

$$[[f, g], h] = f \cdot \partial^2 g \cdot h - \partial^2 f \cdot g \cdot h - f \cdot \partial g \cdot \partial h + \partial f \cdot g \cdot \partial h.$$

由此不难证明:

$$[[f, g], h] + [[g, h], f] + [[h, f], g] = 0,$$

从而 $Q(x, y)$ 在运算 $[\cdot, \cdot]$ 下构成一个李代数.

设 I 可列, 取 $I = \mathbb{Z}_0^+$, 令 $e_{i\lambda} = x^i y^\lambda, i, \lambda \in \mathbb{Z}_0^+$, 则 $W = L_C(D_0) = Q(x, y)$. 因

$$\begin{aligned} [e_{i\lambda}, e_{j\mu}] &= q(x)y(x^i y^\mu \cdot x^j \lambda y^{\lambda-1} - x^j y^\lambda \cdot x^i \cdot \mu y^{\mu-1}) \\ &= q(x)(\lambda - \mu)x^{i+j}y^{\lambda+\mu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\lambda - \mu) \sum_{r=0}^n q_r x^{i+j+r} y^{(\lambda+\mu)} \\
 &= (\lambda - \mu) \sum_{k=i+j}^{i+j+n} q_{k-i-j} x^k y^{\lambda+\mu} \\
 &= (\lambda - \mu) \sum_{k=i+j}^{i+j+n} q_{k-i-j} e_{k, \lambda+\mu}.
 \end{aligned}$$

故有

$$\varphi_{ij}^k(\lambda, \mu) = \begin{cases} q_{k-i-j}(\lambda - \mu), & i+j \leq k \leq i+j+n, \\ 0, & k < i+j \text{ 或 } k > i+j+n. \end{cases} \quad (3.4)$$

下面求以 $\{\varphi_{ij}^k(\lambda, \mu)\}$ 为结构函数组的 Hamilton 算子 $H = \|H_{ij}\|$. 因

$$\begin{aligned}
 (H\xi, \eta) &= \int \sum_k u_k \sum_{i,j} q_{k-i-j} (\xi_i^{(1)} \eta_j - \xi_j \eta_i^{(1)}) dx \\
 &= \int \sum_{i,j} \eta_i \left[\sum_{k=i+j}^{i+j+n} q_{k-i-j} \left(u_k^{(1)} + 2u_k \frac{d}{dx} \right) \right] \xi_j dx,
 \end{aligned}$$

故 Hamilton 算子 $H = \|H_{ij}\|$ 为

$$H_{ij} = \sum_{k=i+j}^{i+j+n} q_{k-i-j} \left(u_k^{(1)} + u_k \frac{d}{dx} \right), \quad i, j \in \mathbb{Z}_0^+. \quad (3.5)$$

于是我们有

定理 2 设 $I = \mathbb{Z}_0^+$, 下列矩阵微分算子 $H = \|H_{ij}\|$:

$$H_{ij} = \sum_{k=i+j}^{i+j+n} q_{k-i-j} \left(u_k^{(1)} + u_k \frac{d}{dx} \right), \quad i, j \in I, q_r \in \mathbb{C}, 0 \leq r \leq n$$

是 Hamilton 算子.

(2) 设 $I = \{0, 1, \dots, m\}$, $m \geq 0$, 令 $e_{i\lambda}$ 为下列一阶线性微分算子

$$L_{i\lambda} = \exp \left[\lambda \left(- \sum_{r=0}^m c_r x_r \right) \right] \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i \in I, \lambda \in \mathbb{R}, c_r \in \mathbb{C}, 0 \leq r \leq n.$$

由于

$$\begin{aligned}
 [L_{i\lambda}, L_{j\mu}] &= L_{i\lambda} L_{j\mu} - L_{j\mu} L_{i\lambda} \\
 &= \lambda c_j \exp \left[(\lambda + \mu) \left(- \sum_{r=0}^m c_r x_r \right) \right] \frac{\partial}{\partial x_i} - \mu c_i \exp \left[(\lambda + \mu) \left(- \sum_{r=0}^m c_r x_r \right) \right] \frac{\partial}{\partial x_j}
 \end{aligned}$$

属于 $W = L_{\mathbb{C}}(D_0)$, 故 $W = L_{\mathbb{C}}(D_0)$ 是全体一阶线性微分算子所构成的李代数的一个李子代数.

$$\text{当 } i \neq j \text{ 时, } \varphi_{ij}^k(\lambda, \mu) = \begin{cases} \lambda c_j, & k = i, \\ -\mu c_i, & k = j, \\ 0, & \text{其它;} \end{cases}$$

$$\text{当 } i = j \text{ 时, } \varphi_{ij}^k(\lambda, \mu) = \begin{cases} (\lambda - \mu) c_i, & k = i, \\ 0, & k \neq i. \end{cases}$$

由此可得

$$\begin{aligned}(H\xi, \eta) &= \int \sum_{i,j} (u_i c_j \xi_i^{(1)} \eta_j - u_j c_i \xi_j^{(1)} \eta_i) dx \\ &= \int \left\{ \sum_{i,j} \eta_i \left[c_j u_i^{(1)} + (c_j u_i + c_i u_j) \frac{d}{dx} \right] \xi_j \right\} dx\end{aligned}$$

这样得到 Hamilton 算子 $H = \|H_{ij}\|$:

$$H_{ij} = c_j u_i^{(1)} + (c_j u_i + c_i u_j) \frac{d}{dx}, \quad i, j \in I,$$

对于一般的指标集 I , I 可以有限也可无限, 取 $c_{ij}^k = \delta_{ki} c_j$, $i, j, k \in I$, $c_i \in \mathbb{C}$, $i \in I$, 则由 (2.3) 确定的运算. 满足 (2.4) 和 (2.5), 于是线性算子 $H = \|H_{ij}\|$:

$$H_{ij} = \sum_k \left[c_{ij}^k u_k^{(1)} + (c_{ij}^k + c_{ji}^k) u_k \frac{d}{dx} \right], \quad i, j \in I.$$

即

$$H_{ij} = c_j u_i^{(1)} + (c_j u_i + c_i u_j) \frac{d}{dx}, \quad i, j \in I \quad (3.6)$$

是一个 Hamilton 算子.

综上所述我们有:

定理 3 矩阵微分算子 $H = \|H_{ij}\|$:

$$H_{ij} = c_j u_i^{(1)} + (c_j u_i + c_i u_j) \frac{d}{dx}, \quad i, j \in I, \quad c_i \in \mathbb{C}, \quad i \in I$$

是 Hamilton 算子, 这里指标集 I 任意.

(3) 设 $I = \mathbb{Z}_0^+$, $a \in \mathbb{C}$ 且 $a \neq 0$, $m \in \mathbb{Z}_0^+$, 取 $e_{i\lambda}$ 为微分算子

$$F_{i\lambda} = \exp(ax) \left(\frac{d}{dx} \right)^{i+m}, \quad i \in I, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

按通常的方法定义

$$[F_{i\lambda}, F_{j\mu}] = F_{i\lambda} F_{j\mu} - F_{j\mu} F_{i\lambda}.$$

下面计算 $F_{i\lambda} F_{j\mu}$. $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}F_{i\lambda} F_{j\mu} f &= F_{i\lambda} (F_{j\mu} f) = e^{a\lambda x} \left(\frac{d}{dx} \right)^{i+m} (e^{a\mu x} f^{(j+m)}) \\ &= e^{a\lambda x} \sum_{q=0}^{i+m} \binom{i+m}{q} (a\mu)^q e^{a\mu x} f^{(i+j+2m-q)} \\ &= e^{a(\lambda+\mu)x} \sum_{k=j}^{i+j+m} \binom{i+m}{k-j} (a\mu)^{i+j+m-k} f^{(k+m)} \quad (\text{令 } i+j+m-q=k),\end{aligned}$$

于是 $F_{i\lambda} F_{j\mu} = \sum_{k=j}^{i+j+m} \binom{i+m}{k-j} (a\mu)^{i+j+m-k} F_{k(\lambda+\mu)} \in W = L_{\mathbb{C}}(D_0)$, 因此 $[F_{i\lambda}, F_{j\mu}] \in$

W , 从而 W 是全体微分算子所构成的李代数的一个李子代数.

容易算得

$$[F_{i\lambda}, F_{j\mu}] = \sum_{k=0}^{i+j+m} \left[\binom{i+m}{k-i} (a\mu)^{i+j+m-k} - \binom{j+m}{k-i} (a\lambda)^{i+j+m-k} \right] \\ \times e^{a(\lambda+\mu)x} \left(\frac{d}{dx} \right)^{k+m},$$

其中规定 $\binom{n}{l} = 0$, $n \in \mathbb{Z}_0^+$, $l \in \mathbb{Z}^- \triangleq \{-1, -2, \dots\}$, $\binom{0}{0} = 0$.

由此可得

$$\varphi_{ij}^k(\lambda, \mu) = \begin{cases} \binom{i+m}{k-i} (a\mu)^{i+j+m-k} - \binom{j+m}{k-i} (a\lambda)^{i+j+m-k}, & 0 \leq k \leq i+j+m, \\ 0, & k > i+j+m. \end{cases} \quad (3.7)$$

下面计算相应的 Hamilton 微分算子 $H = \|H_{ij}\|$. 因

$$(H\xi, \eta) = \int \sum_{k=0}^{i+j+m} u_k \sum_{i,j} \left[\binom{i+m}{k-i} a^{i+j+m-k} \xi_i \eta_j^{(i+j+m-k)} \right. \\ \left. - \binom{j+m}{k-i} a^{i+j+m-k} \xi_i^{(i+j+m-k)} \eta_j \right] dx \\ = \int \sum_{i,j} \sum_{k=0}^{i+j+m} \left[\binom{j+m}{k-i} a^{i+j+m-k} \left(-\frac{d}{dx} \right)^{i+j+m-k} (u_k \xi_i) \eta_j \right. \\ \left. - \binom{i+m}{k-i} a^{i+j+m-k} u_k \xi_i^{(i+j+m-k)} \eta_j \right] dx$$

故得到 Hamilton 算子 $H = \|H_{ij}\|$:

$$H_{ij} = \sum_{k=0}^{i+j+m} \left[\binom{j+m}{k-i} a^{i+j+m-k} \left(-\frac{d}{dx} \right)^{i+j+m-k} \circ u_k \right. \\ \left. - \binom{i+m}{k-i} a^{i+j+m-k} u_k \left(\frac{d}{dx} \right)^{i+j+m-k} \right] \\ = \sum_{k=i}^{i+j+m} \binom{j+m}{k-i} \left(-a \frac{d}{dx} \right)^{i+j+m-k} \circ u_k \\ - \sum_{k=j}^{i+j+m} \binom{i+m}{k-j} u_k \left(a \frac{d}{dx} \right)^{i+j+m-k}, \quad i, j \in I. \quad (3.8)$$

于是可以得到下列结论:

定理 4 设 $a \in \mathbb{C}$ 且 $a \neq 0$, $m \in \mathbb{Z}_0^+$, $I = \mathbb{Z}_0^+$, 则矩阵微分算子 $H = \|H_{ij}\|$:

$$H_{ij} = \sum_{k=i}^{i+j+m} \binom{j+m}{k-i} \left(-a \frac{d}{dx} \right)^{i+j+m-k} \circ u_k \\ - \sum_{k=j}^{i+j+m} \binom{i+m}{k-j} u_k \left(a \frac{d}{dx} \right)^{i+j+m-k}, \quad i, j \in I$$

是一个 Hamilton 算子.

此定理推广了 $a = 1$ 且 $m = 0$ 的特殊情形^[3].

§ 4. 一个二阶结构函数组相应的 Hamilton 算子

设 $\{\varphi_{ij}^k(\lambda, \mu)\}$ 是一组可行函数组, 则^[5]易知按 (3.1) 定义的二元运算使 W 构成一个李代数的充要条件为:

$$\varphi_{ij}^k(\lambda, \mu) = -\varphi_{ji}^k(\mu, \lambda), \quad (4.1)$$

$$\sum_a \varphi_{ij}^a \varphi_{ak}^l(\lambda + \mu, \nu) + \left(\text{同时循环} \begin{matrix} ijk \\ \lambda \mu \nu \end{matrix} \right) = 0. \quad (4.2)$$

考虑二阶可行函数组

$$\varphi_{ij}^k(\lambda, \mu) = b_{ij}^k \lambda \mu + d_{ij}^k, \quad i, j, k \in I. \quad (4.3)$$

易知等式 (4.1) 成立 $\Leftrightarrow \{b_{ij}^k\}$ 与 $\{d_{ij}^k\}$ 反称, 即

$$b_{ij}^k = -b_{ji}^k, \quad d_{ij}^k = -d_{ji}^k. \quad (4.4)$$

下面讨论等式 (4.2). 因

$$\begin{aligned} & \sum_a \varphi_{ij}^a(\lambda, \mu) \varphi_{ak}^l(\lambda + \mu, \nu) \\ &= \sum_a (b_{ij}^a \lambda \mu + d_{ij}^a) [b_{ak}^l(\lambda + \mu) \nu + d_{ak}^l] \\ &= \sum_a [b_{ij}^a b_{ak}^l \lambda \mu \nu (\lambda + \mu) + b_{ij}^a d_{ak}^l \lambda \mu + d_{ij}^a b_{ak}^l (\lambda + \mu) \nu + d_{ij}^a d_{ak}^l], \end{aligned}$$

故 (4.2) 成为

$$\begin{aligned} & \sum_a [b_{ij}^a b_{ak}^l \lambda \mu \nu (\lambda + \mu) + b_{ij}^a d_{ak}^l \lambda \mu + d_{ij}^a b_{ak}^l (\lambda + \mu) \nu + d_{ij}^a d_{ak}^l] + \left(\text{同时循环} \begin{matrix} ijk \\ \lambda \mu \nu \end{matrix} \right) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

令

$$b_l(i, j, k) = \sum_a b_{ij}^a b_{ak}^l, \quad i, j, k, l \in I. \quad (4.6)$$

考虑 (4.5) 中 $\lambda^2 \mu \nu$ 的系数可得

$$b_l(i, j, k) + b_l(k, i, j) = 0,$$

于是

$$b_l(i, j, k) = -b_l(k, i, j) = b_l(j, k, i) = -b_l(i, j, k),$$

从而

$$b_l(i, j, k) = 0. \quad (4.7)$$

考虑 (4.5) 中 $\lambda \mu$ 的系数可得

$$\sum_a (b_{ij}^a d_{ak}^l + d_{ij}^a b_{ak}^l + d_{ij}^a b_{ak}^l) = 0. \quad (4.8)$$

考虑 (4.5) 的常数项得到

$$\sum_a (d_{ij}^a d_{ak}^l + d_{ij}^a d_{ak}^l + d_{ij}^a d_{ak}^l) = 0. \quad (4.9)$$

反之,一旦有(4.7—4.9),由 i, j, k 和 λ, μ, ν 的循环性就知(4.5)式成立.

在 X (X 的定义见 §1) 上定义二个二元线性运算如下

$$e_i \times e_j = \sum_k b_{ij}^k e_k, \quad e_i * e_j = \sum_k d_{ij}^k e_k, \quad i, j \in I, \quad (4.10)$$

则(4.7—4.9)等价于(只要注意 $d_{ji}^k = -d_{ij}^k$)

$$(a \times b) \times c = 0,$$

$$(a \times b) * c + (b * c) \times a + (c * a) \times b = 0,$$

$$(a * b) * c + (b * c) * a + (c * a) * b = 0,$$

这里 $a, b, c \in X$. 又 $\{\varphi_{ij}^k\}$ 是二阶的,故 $\times$ 非零,这样运算 $\times$ 使 X 构成一个二次可交换李代数^[6].

下面求以上述 $\{\varphi_{ij}^k(\lambda, \mu)\}$ 为其结构函数组的线性矩阵微分算子. 因

$$\begin{aligned} (H\xi, \eta) &= \int \sum_k u_k \sum_{i,j} (b_{ij}^k \xi_i^{(1)} \eta_j^{(1)} + d_{ij}^k \xi_i \eta_j) dx \\ &= \int \sum_{i,j} \eta_i \sum_k \left[b_{ij}^k \left(u_k^{(1)} \frac{d}{dx} + u_k \frac{d^2}{dx^2} \right) + d_{ij}^k u_k \right] \xi_i dx, \end{aligned}$$

故得相应的算子 $H = \|H_{ij}\|$:

$$H_{ij} = \sum_k \left[b_{ij}^k \left(u_k^{(1)} \frac{d}{dx} + u_k \frac{d^2}{dx^2} \right) + d_{ij}^k u_k \right], \quad i, j \in I.$$

综上所述我们得到如下结论:

定理 5 二阶 u -线性矩阵微分算子 $H = \|H_{ij}\|$:

$$H_{ij} = \sum_k \left[b_{ij}^k \left(u_k^{(1)} \frac{d}{dx} + u_k \frac{d^2}{dx^2} \right) + d_{ij}^k u_k \right], \quad i, j \in I. \quad (4.11)$$

(其中 $\{b_{ij}^k\}$ 与 $\{d_{ij}^k\}$ 是可行数组,且 $\{b_{ij}^k\}$ 非零)为 Hamilton 算子的充要条件是按(4.10)式定义的二个二元线性运算 $\times$ 和 $*$ 满足下列条件:

- (1) 运算 $\times$ 使 X 构成一个二次可交换李代数;
- (2) 运算 $*$ 使 X 构成一个李代数;
- (3) 运算 $*$ 和 $\times$ 有关系:

$$(a \times b) * c + (b * c) \times a + (c * a) \times b = 0, \quad a, b, c \in X. \quad (4.12)$$

我们取 $d_{ij}^k = cb_{ij}^k$, $c \in \mathbb{C}$, $\{b_{ij}^k\}$ 是一个二次可交换李代数的结构常数,则条件(1)—(3)都满足,所以由定理 5 知对应的算子 $H = \|H_{ij}\|$:

$$H_{ij} = \sum_k b_{ij}^k \left(u_k^{(1)} \frac{d}{dx} + u_k \frac{d^2}{dx^2} + cu_k \right), \quad i, j \in I \quad (4.13)$$

是一个 Hamilton 算子.

§ 5. 一种特殊情形

本节我们考虑第 2 节的一种特殊情形. 选取 $I = \{0, 1, \dots, p\}$, $p \geq 0$, 并取

$$c_{ij}^k = \delta_{i+j, p+k}, \quad i, j, k \in I. \quad (5.1)$$

按 (2.19) 式可得到相应的 Hamilton 算子 $H^{[6]}$:

$$H = H(u) = \left(\sum_k c_{ij}^k (u'_k + 2u_k D) \right)_{(p+1) \times (p+1)}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & u'_0 + 2u_0 D & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & u'_1 + 2u_1 D & \\ & & & & & \ddots \\ u'_0 + 2u_0 D & u'_1 + 2u_1 D & \cdots & u'_p + 2u_p D & & \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

其中 $u'_i = \frac{d}{dx} u_i$, $0 \leq i \leq p$, $D = \frac{d}{dx}$. 令

$$K = \sum_{m \geq 0} B^m D^m, \quad B^m = (b_{ijm})_{(p+1) \times (p+1)}, \quad b_{ijm} = (-1)^{m+1} b_{ijm}, \quad i, j \in I, m \geq 0, \quad (5.3)$$

因 K 反称, 故是 Hamilton 算子.

关于 $H + K$ 的 Hamilton 性我们有下列结论:

定理 6 设 H, K 分别是由 (5.2), (5.3) 确定的 Hamilton 算子, 则 $H + K$ 为 Hamilton 算子的充要条件是

$$B^m = 0, \quad m \neq 1, 3, \quad (5.4)$$

$$B^1 = \begin{bmatrix} 0 & & & & c_1 \\ & \ddots & & & \\ & & c_3 & & \\ & & & \ddots & \\ c_1 & c_3 & \cdots & c_{2p+1} \end{bmatrix}, \quad B^3 = \begin{bmatrix} 0 & & & & c_2 \\ & \ddots & & & \\ & & c_4 & & \\ & & & \ddots & \\ c_2 & c_4 & \cdots & c_{2p+2} \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

其中 $c_1, c_2, \dots, c_{2p+2}$ 是任意的常数.

证 定理的充分性已在 [6] 中得证, 下证其必要性.

设 $m = 2$ 或 $m \geq 4$, 由 (5.1) 易知

$$A_i \triangleq (c_{i,p}^0, c_{i,p}^1, \dots, c_{i,p}^p)^T = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T, \quad 0 \leq i \leq p, \quad \text{第 } i \text{ 个}$$

这正好构成 $\mathbb{R}^{p+1}$ 的一组基. 由 (2.21) 知

$$A_i^T B^m = 0, \quad 0 \leq i \leq p,$$

故

$$B^m = 0, \quad m = 2, m \geq 4.$$

下设 $m = 0, 1, 3$, 由 (5.1) 易知此时 (2.20), 即为

$$\sum_l \delta_{i+j, l+p} b_{lkm} = \sum_l \delta_{j+k, l+p} b_{lim}. \quad (5.6)$$

取 $j = p$, 则有 $b_{ikm} = b_{kim}$, 故 B^m 对称. 又因 B^0 反称, 故 $B^0 = 0$.

下证当 $m = 1, 3$ 时, 有

$$b_{rim} = 0, \text{ 当 } 0 \leq r+s \leq p-1 \text{ 时,} \quad (5.7)$$

$$b_{rim} = b_{lm}, \text{ 当 } \exists l \in I \text{ 使 } r+s=p+l \text{ 时.} \quad (5.8)$$

先证 (5.7). 下设 $0 \leq r+s \leq p-1$. 在 (5.6) 中, 取 $i=r+s+1 (\leq p)$, $j=p-s-1 (\geq 0)$, $k=s$, 则 $j+k=p-1 < p$, 故 (5.6) 式右边为零, 而左边 $=b_{rim}$, 因而 $b_{rim} = 0$.

再证 (5.8). 下设 $r+s=p+l$, $l \in I$. 在 (5.6) 中, 取 $i=p$, $j=r$, $k=s$, 则 $b_{rim} = b_{lpm}$, 令 $b_{lm} = b_{lpm}$ 即得证.

最后, 令 $c_{2i+1} = b_{i1}$, $c_{2i+2} = b_{i2}$, $0 \leq i \leq p$, 即得证定理之必要性. 证毕.

由上述定理我们可知在形如 $(u'_0 + 2u_0D) + \sum_{m=0}^n b_m D^m$ 的微分算子中有仅有

$$(u'_0 + 2u_0D) + b_1D + b_3D^3$$

为 Hamilton 算子. 另文献[7,8]中的 Hamilton 算子均是定理 6 的特例.

作者对屠规彰研究员的精心指导表示由衷的感谢!

参 考 文 献

- [1] И. М. Гельфанд, И. Я. Дорфман, Гамильтоновы операторы и связанные с ними алгебраические структуры, *Функц. анализ*, **13**:4 (1979), 13—20.
- [2] F. Magri, A Simple Model of the Integrable Hamiltonian Equation, *J. Math. Phys.*, **19**:5 (1978), 1156—1162.
- [3] P. J. Olver, Applications of Lie Groups to Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin 1986.
- [4] G. Z. Tu, The trace identity, a powerful tool for constructing the Hamiltonian structure of integrable systems, *J. Math. Phys.*, **30**:2 (1989), 330—338.
- [5] И. М. Гельфанд, И. Я. Дорфман, Гамильтоновы операторы и бесконечномерные алгебры Ли, **15**: 3 (1981), 23—40.
- [6] 马文秀, 两类哈密顿算子之研究, 中国科学院研究生院学报, **3**: 2 (1986), 37—48.
- [7] G. Z. Tu, A Simple approach to Hamiltonian structures of Soliton equations. -I., *Il Nuovo Cimento*, **73B**: 1(1983), 15—26.
- [8] M. Boiti, C. Laddomada, F. Pempinelli & G. Z. Tu, On a New Hierarchy of Hamiltonian Soliton Equations, *J. Math. Phys.*, **24**:8 (1983), 2035—2041.
- [9] 马文秀, 一族具有三 Hamilton 结构的发展方程及其对称, 上海交通大学学报, **23**: 1 (1989), 9—18.

$$b_{rsm} = 0, \text{ 当 } 0 \leq r + s \leq p - 1 \text{ 时,} \quad (5.7)$$

$$b_{rsm} = b_{lm}, \text{ 当 } \exists l \in I \text{ 使 } r + s = p + l \text{ 时.} \quad (5.8)$$

先证 (5.7). 下设 $0 \leq r + s \leq p - 1$. 在 (5.6) 中, 取 $i = r + s + 1 (\leq p)$, $j = p - s - 1 (\geq 0)$, $k = s$, 则 $j + k = p - 1 < p$, 故 (5.6) 式右边为零, 而左边 $= b_{rsm}$, 因而 $b_{rsm} = 0$.

再证 (5.8). 下设 $r + s = p + l$, $l \in I$. 在 (5.6) 中, 取 $i = p$, $j = r$, $k = s$, 则 $b_{rsm} = b_{lpm}$, 令 $b_{lm} = b_{lpm}$ 即得证.

最后, 令 $c_{2i+1} = b_{i1}$, $c_{2i+2} = b_{i2}$, $0 \leq i \leq p$, 即得证定理之必要性. 证毕.

由上述定理我们可知在形如 $(u'_0 + 2u_0D) + \sum_{m=0}^n b_m D^m$ 的微分算子中有仅有

$$(u'_0 + 2u_0D) + b_1D + b_3D^3$$

为 Hamilton 算子. 另文献[7,8]中的 Hamilton 算子均是定理 6 的特例.

作者对屠规彰研究员的精心指导表示由衷的感谢!

参 考 文 献

- [1] И. М. Гельфанд, И. Я. Дорфман, Гамильтоновы операторы и связанные с ними алгебраические структуры, *Функц. анализ*, **13**:4 (1979), 13—20.
- [2] F. Magri, A Simple Model of the Integrable Hamiltonian Equation, *J. Math. Phys.*, **19**:5 (1978), 1156—1162.
- [3] P. J. Olver, Applications of Lie Groups to Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin 1986.
- [4] G. Z. Tu, The trace identity, a powerful tool for constructing the Hamiltonian structure of integrable systems, *J. Math. Phys.*, **30**:2 (1989), 330—338.
- [5] И. М. Гельфанд, И. Я. Дорфман, Гамильтоновы операторы и бесконечномерные алгебры Ли, **15**: 3 (1981), 23—40.
- [6] 马文秀, 两类哈密顿算子之研究, 中国科学院研究生院学报, **3**: 2 (1986), 37—48.
- [7] G. Z. Tu, A Simple approach to Hamiltonian structures of Soliton equations. -I., *Il Nuovo Cimento*, **73B**: 1(1983), 15—26.
- [8] M. Boiti, C. Laddomada, F. Pempinelli & G. Z. Tu, On a New Hierarchy of Hamiltonian Soliton Equations, *J. Math. Phys.*, **24**:8 (1983), 2035—2041.
- [9] 马文秀, 一族具有三 Hamilton 结构的发展方程及其对称, 上海交通大学学报, **23**: 1 (1989), 9—10.